Coordinación de Matemáticas
Departamento de Álgebra
Agosto 2011

FASCÍCULO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Ing. Juan Velázquez Torres

FASCÍCULO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Coordinación de Matemáticas
Departamento de (Matemáticas) Álgebra
Agosto del 2011

Juan Velázquez Torres

VELÁZQUEZ TORRES, Juan. *Fascículo de inducción matemática.* México, Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ingeniería, 2010, 63 p.

Fascículo de inducción matemática.

ISBN 968-36-9415-2

Primera edición, 2000.
Primera reimpresión de la primera edición, 2001.
Segunda reimpresión de la primera edición, 2002.
Tercera reimpresión de la primera edición, 2003.
Cuarta reimpresión de la primera edición, 2005.
Quinta reimpresión de la primera edición, 2008.
Sexta reimpresión de la primera edición, 2010.

Impreso y hecho en México

PRÓLOGO

Este fascículo de Inducción Matemática tiene como principal objetivo facilitar la enseñanza del método de Inducción Matemática y contribuir a mejorar el aprendizaje de los alumnos en este tema. Por tanto es un auxiliar didáctico que aspira a convertirse en un verdadero colaborador de la tarea docente y del aprendizaje.

El tema de Inducción Matemática está contenido en el segundo tema del programa de la asignatura Álgebra, plan 2009, que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

El grado de dificultad del tema, su ubicación dentro del programa de estudios, el tratamiento que se le da en algunos textos de Álgebra y los antecedentes académicos de los alumnos, son algunos factores que de una u otra forma contribuyen a que el tema de Inducción Matemática se convierta en un tópico difícil para el alumno que cursa la asignatura.

Desde el semestre 94-1 he impartido la asignatura Álgebra y en cada semestre corroboro que los alumnos tienen muchas dificultades en la demostración de proposiciones matemáticas en las cuales se utiliza el método de Inducción Matemática.

Por estas razones, surgió en el autor la necesidad de elaborar un material de apoyo didáctico: ***"Fascículo de Inducción Matemática"***.

El fascículo está dividido en tres partes. En la primera se exponen los antecedentes históricos, en la segunda la teoría correspondiente al tema y en la tercera se presenta una serie de ejercicios resueltos; al final de ésta se proponen algunos ejercicios para ser resueltos por el alumno.

Agradezco las numerosas y útiles sugerencias realizadas por el ***Ing. Francisco Barrera García***, el ***Ing. Ricardo Martínez Gómez*** y la ***M.I. María Sara Valentina Sánchez Salinas***, para mejorar este fascículo.

Agradezco también la valiosa ayuda de la secretaria de la Coordinación de Matemáticas ***Guadalupe Martínez Dávalos*** quien realizó la captura del presente trabajo y contribuyó en el diseño del mismo.

El autor

I. RESEÑA HISTÓRICA

La evolución es la Ley de la vida
El número es la Ley del Universo
La unidad es la Ley de Dios.

Aforismo atribuido a Pitágoras.

I.1

PERSPECTIVA GENERAL

Algunos pueblos civilizados, en el transcurso de su historia han dirigido parte de sus esfuerzos hacia el estudio de las matemáticas. Los orígenes prehistóricos de éstas son tan ignotas como los del lenguaje y el arte. Cualquiera que sea su punto de partida, las matemáticas han llegado hasta nuestros días por dos corrientes principales, el número y la forma. La primera comprendió la aritmética y el álgebra, la segunda, la geometría. En el siglo XVIII esas dos corrientes se unieron y formaron el creciente caudal del análisis matemático.

Existe un abismo entre el empirismo práctico de los agrimensores que parcelaban los campos del antiguo Egipto, y la geometría de los griegos del siglo VI a.c. Aquello fue lo que precedió a las matemáticas; esto, las matemáticas propiamente dichas. Las matemáticas no existen sin la estricta demostración a partir de hipótesis admitidas y claramente establecidas como tales. Lo anterior no niega que la intuición, los experimentos, la inducción y el golpe de vista sean elementos importantes en la inventiva matemática; únicamente establece el criterio por el cual el resultado final de todo golpe de vista, sea cualquiera el nombre que se le asigne, se juzga o no como matemáticas.

Los matemáticos insisten en la demostración de reglas de aplicación práctica obtenidas inductivamente porque saben que no se pueden aceptar las aparentes analogías que presentan fenómenos de niveles diferentes de experiencia. Lo que cuenta en las matemáticas es la imaginación y la rigurosa demostración, y no la exactitud numérica de una máquina o de un laboratorio de calculistas.

I.2

LOS SIETE PERIODOS DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

Una división más convencional de la escala del tiempo, separa toda la historia de las matemáticas en siete periodos:

1°. De la época más remota a la antigua Babilonia y Egipto, inclusive.

2°. La contribución griega, desde cerca de 600 años a.c., hasta aproximadamente el año 300 de nuestra Era, siendo la mejor en el siglo IV y III a.c.

3°. Los pueblos orientales y semíticos (hindú, chino, persa, musulmán, judío, etc.) en parte antes y en parte después del 2° y extendiéndose hasta el 4° periodo.

4°. Europa durante el Renacimiento y la Reforma, aproximadamente los siglos XV y XVI.

5°. Los siglos XVII y XVIII.
6°. El siglo XIX
7°. El siglo XX.

Es posible que el 6° y el 7° sean uno solo, no obstante que poco después del 1900 llegaron a manifestarse nuevas tendencias muy significativas.

La contribución, de influencia más perdurable en las matemáticas, de todos los periodos anteriores al Renacimiento, fue la invención griega del razonamiento deductivo estricto. Siguiendo en importancia están los desarrollos del álgebra simbólica durante el Renacimiento, efectuados en Italia y Francia. Los hindúes del siglo VII al XII d.c. habían inventado el simbolismo algebraico; los mahometanos regresaron, en su edad clásica, a un álgebra casi completamente retórica. El tercero de los adelantos más importantes sucede en la primera parte del quinto periodo (siglo XVII) cuando se unen a las dos corrientes principales (el número y la forma) una nueva corriente: la continuidad. Esto generó al cálculo y al análisis matemático en general; también transformó la geometría e hizo posible la creación ulterior de los altos espacios necesarios para las modernas matemáticas aplicadas. Los países que ocuparon el primer lugar fueron Francia, Inglaterra y Alemania.

El quinto periodo se considera generalmente como el manantial de las matemáticas modernas puras. Comprende el principio de la ciencia moderna; otro adelanto principal fue la aplicación extensiva de las recién creadas matemáticas puras a la astronomía dinámica con el trabajo de Newton, y un poco más tarde, a las ciencias físicas, siguiendo la metodología de Galileo y de Newton. Finalmente, en el siglo XIX el gran río se desborda y las matemáticas florecen plenamente.

Si las matemáticas del siglo XX difieren en forma importante de las del XIX, posiblemente las distinciones más interesantes son un marcado aumento en la abstracción con la consecuente ganancia en la generalización y una preocupación creciente en la morfología y anatomía comparada de las estructuras matemáticas.

La división de la historia matemática en cerca de siete periodos es más o menos tradicional. Los periodos remoto, medio y creciente, descritos con anterioridad parecen dar por sí mismos una presentación más verdadera del desarrollo de las matemáticas y una imagen vívida de su vitalidad innata. En cada uno de los siete periodos hubo un ascenso bien definido hacia la madurez y una declinación subsiguiente de cada una de las diversas formas limitadas del pensamiento matemático.

I.3

UNA BASE FIRME: EL MÉTODO POSTULACIONAL

La demostración de que sólo son posibles cinco sólidos regulares exige una teoría bien desarrollada del espacio euclidiano. La demostración se atribuye a Theaeteto, hacia mediados del siglo IV a.c. Euclides completó en el mismo siglo la teoría elemental de esos sólidos en su libro XIII, siendo ésta una de las más importantes aportaciones de su geometría. Con la terminación de los Elementos de Euclides, alcanzó la geometría elemental griega, excluidas las cónicas, su rígida perfección. Era una geometría completamente sintética y métrica. Por primera vez en la historia se unían y se correlacionaban numerosos descubrimientos aislados utilizando un principio único de guía, a saber, el de la deducción rigurosa partiendo de suposiciones expuestas explícitamente.

Algunos pitagóricos, y Eudoxio antes que Euclides, habían vislumbrado detalles importantes del magno proyecto, pero había de ser Euclides el que vería todo el conjunto. Por consiguiente, es el gran perfeccionador, el creador de lo que se llama hoy el "método postulacional", el sistema nervioso central de las matemáticas.

Es increíble que el método de Euclides tuviera que esperar hasta el siglo XIX para que ocurriera una verdadera apreciación de su importancia. La geometría continuó, por supuesto, en la tradición postulacional. Pero esto, evidentemente, era simple inercia, pues tuvieron que pasar varias décadas después de la explosión de la geometría proyectiva en el siglo XIX antes de que el tema recibiera una base sólida. Y sólo en la década de 1830 a 1840 d.c. sucedió una tentativa seria para proporcionar una base postulacional al álgebra elemental. Hasta el año de 1889 no se sintió en todas las matemáticas el impacto de la metodología de Euclides cuando Giuseppe Peano propone cinco postalados que caracterizan al conjunto de los números naturales; postulados que a su vez constituyen el punto de partida para una construcción del sistema de números reales.

Simultáneamente con la potencia creadora del método postulacional en aritmética, geometría, álgebra y topología, la teoría de grupos y el análisis que distinguieron a los cuatro primeras décadas del siglo XIX, el método se hizo casi popular en la física teórica en la década del 1930 a 1940 a través de los trabajos de Dirac, aunque ensayos científicos como los de Mash en mecánica y A. Einstein en relatividad, habían mostrado que el método postulacional es no sólo aclarador sino también creador.

I.4

HACIA LA ESTRUCTURA MATEMÁTICA

Desde el punto de vista de las matemáticas como un todo, la metodología de la generalización y de la abstracción deliberadas, que culminó en el siglo XX en unas matemáticas de la estructura que se desarrollaron con rapidez, es sin duda alguna la aportación más significativa de todas las tentativas realizadas para ampliar el concepto del número. Pero en cada fase de la progresión de los números naturales 1, 2, 3,... hacia otros tipos de números, se enriquecieron y se ensancharon todas las diferentes campos de las matemáticas contiguos a la aritmética. El rápido crecimiento de la aritmética y el álgebra fue consecuencia de un profundo cambio en la calidad del pensamiento matemático y de sus objetivos ; donde resulta más fácil observar este cambio, es quizás en la evolución del concepto del número.

En un principio los números eran nombres tan concretos como padre y madre, tal vez uno de los primeros ejemplos de "uno" y "dos". No sobrevive ningún indicio del paso real de lo concreto a lo abstracto; al respecto podemos imaginarnos el desconsuelo de los seres humanos cuando por primera vez se estableciera el hecho de que los números naturales no tienen fin, lo que más tarde dio lugar a regimentar la libertad generativa "n a $n + 1$", de los números en la sucesión indefinida, $1, 2, 3, \ldots, n, n + 1$;

... si esta generación interminable de números tuviera alguna restricción finita, serían menos aterradores.

El que primero se diera cuenta de que la división "pares" e "impares" es suficiente para incluir a todos los números naturales, debió experimentar una sensación de fuerza casi sobrenatural. Después de todo, la interminable sucesión no era más misteriosa que la misma humanidad que podía ser clasificada en "macho" y "hembra". Por consiguiente, esa separación matemáticamente tan útil de los números naturales en dos clases se hizo completamente satisfactoria para la mentalidad del hombre en su esfuerzo por tratar de comprender una totalidad infinita en términos finitos, y por lo tanto para poner lo infinito al alcance de una sintaxis finita.

Hasta los últimos años del siglo XIX nadie se preocupó de los números naturales. Todas las matemáticas, desde la aritmética hasta la geometría y el análisis, habían aceptado esos números aparentemente sencillos como "dados". Sin ellos nunca se hubiera podido llegar a producir ninguno de los avances más importantes de la matemática moderna. Y, sin embargo, nadie se preguntaba "¿quién es quien nos ha dado esos números naturales?" Kronecker se los atribuía a Dios, pero esto no es una solución matemática. El asunto se suscitó, no en aritmética, sino en análisis. La contestación la dio la definición moderna de números naturales, lo cual acabó por unir a la aritmética y al análisis en cuanto a su origen común, a saber, la definición que hace Peano acerca de los números naturales. La aritmética de 1, 2, 3, ... , y con ella el análisis matemático, quedaron a merced de las investigaciones de la lógica matemática.

Las consecuentes propuestas matemáticas fueron orientando la estructuración de las teorías algebraicas, en las cuales el número es primordial pero es más relevante la estructura de las relaciones que guardan los números.

I.5

APARICIÓN DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Se considera como fondo todo el material que se ha analizado, para observar ahora la tendencia hacia una generalización cada vez mayor y hacia una abstracción más sutil, que distingue a gran parte de las matemáticas de la época reciente, de casi todo lo que precedió a 1840.

Los orígenes del método abstracto parece que están situados en la década de 1880 a 1890. Parece atribuirse a Peano (italiano, 1858 - 1932) el impulso inicial de este método, con sus postulados de la aritmética en 1889. En concordancia en el programa Euclidiano, Peano emprendió la tarea de estudiar a la aritmética mediante un conjunto de postulados; nace así el método postulacional que es el origen del nuevo pensamiento matemático y la tendencia hacia la abstracción. En el aspecto creador, el análisis postulacional de los sistemas matemáticos sugiere innumerables problemas nuevos.

Fue Peano el hombre que tuvo el valor de arrastrar la impopularidad. Al principio pasó inadvertido excepto en Italia, donde se le consideró notablemente cuando en (1888) empezó a intentar reducir toda la matemática a un simbolismo preciso que dejará muy poco lugar para la vaguedad. Las demostraciones, desde los números naturales a la geometría, estaban basadas en conjuntos de postulados explícitamente enunciados que eran necesarios y suficientes para las demostraciones.

Para alcanzar la precisión deseada simbolizaba partes enteras de la lógica matemática más minuciosamente de lo que habían hecho Boole y sus sucesores en 1847; también redujo a símbolos, frases de las matemáticas técnicas de las que se presentan con frecuencia. El resultado fue un lenguaje universal, prácticamente para todas las matemáticas de aquel tiempo (1890-1900). La metodología de Peano fue un paso adelante en la dirección del razonamiento matemático, y uno de los estímulos más poderosos para la lógica matemática del siglo XX.

Al proyecto de Peano, de traducir en el "Formulaire de mathematiques" (1895 - 1908) las matemáticas técnicas a símbolos de lógica matemática, que él inventó, se debe la simbolización de las matemáticas más amplia que se ha ideado en los libros titulados "Principia mathemática" (1910, 1912, 1913), de Whitehead y Russell. Una sección fundamental de los Principia desarrolla el estudio de las funciones proporcionales. Se llama función proporcional a un enunciado que contenga una variable x tal que se convierta en proposición cuando se da a x algún significado fijo determinado; y una proposición es todo lo que es cierto o lo que es falso. Esta última definición (de Rusell) puede ser menos inocente de lo que parece, como se verá más adelante a propósito del intuicionismo.

Por poco que quede de los Principia revisados de 1925 a 1927, el original de 1910 a 1913 conservará su lugar en la historia como la obra que inició una época nueva de la lógica matemática y de los fundamentos de la matemática.

II. LOS POSTULADOS DE PEANO

Los cinco postulados de Peano a los que se hizo referencia en las partes precedentes y que definen el conjunto de los números naturales, se enuncian a continuación:

(i) $1 \in N$

(ii) Para cada $n \in N$ existe un único $n^* \in N$, llamado el siguiente de n.

(iii) Para cada $n \in N$ se tiene que $n^* \neq 1$.

(iv) Si $m, n \in N$ y $m^* = n^*$, entonces $m = n$.

(v) Todo subconjunto S de N que tenga las propiedades:

a) $1 \in S$

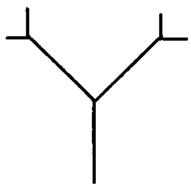
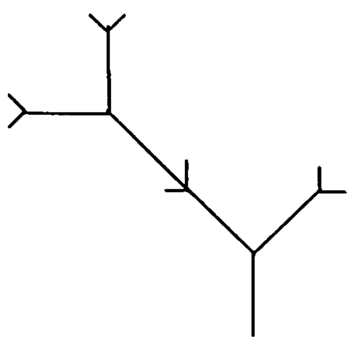
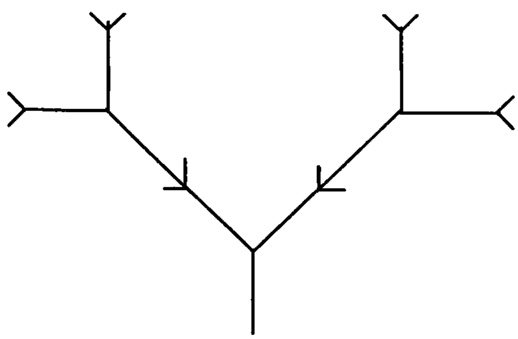
b) $k \in S$ implica que $k^* \in S$
es el mismo conjunto N.

II. 1

EL QUINTO POSTULADO DE PEANO

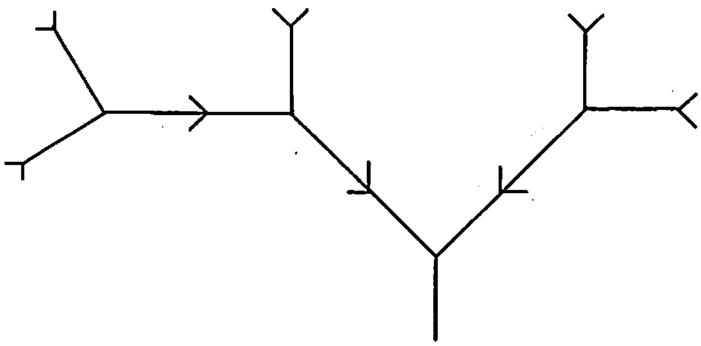
El quinto postulado de Peano nos indica que siempre es posible alcanzar un número natural *"n"* teniendo como punto de partida al número uno y recorriendo los siguientes uno a uno hasta llegar al número natural *"n"*. Ejemplifiquemos ésto con un poco de matemáticas pitagóricas.

Asociemos cada uno de los números *1, 2, 3, ...* a figuras tal y como se ilustra a continuación:

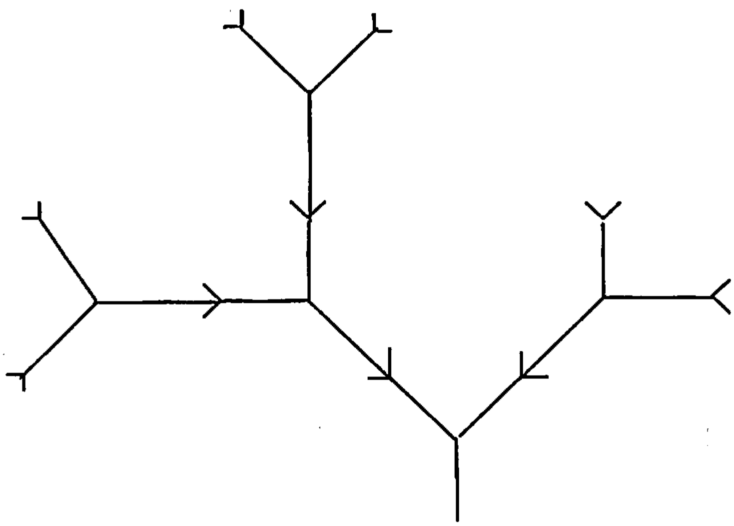
Figura	***Número Asociado***
	***1***
	***2***
	***3***

¿Qué haría usted para construir la figura asociada, por ejemplo, el número *9*? En efecto, seguramente su razonamiento fue construir la figura asociada al número *1*, después las figuras asociadas a los números *2, 3, 4, 5, 6, 7* y *8* hasta llegar a la figura asociada al número deseado, que en este caso, es el *9*. Esto quiere decir que para trazar la figura asociada al número *9*, es necesario partir de la figura asociada al número *1* e ir construyendo las subsecuentes *(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)* hasta llegar a la que corresponde al *9*. Por tanto, para pasar del número 1 al número *9* debemos iniciar el proceso en *1* y recorrer uno a uno los siguientes números hasta llegar al *9*.

Completando el ejemplo:

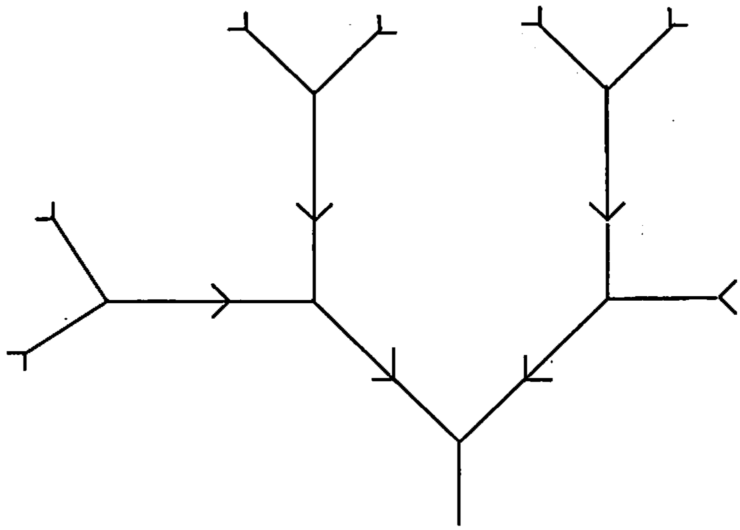


4

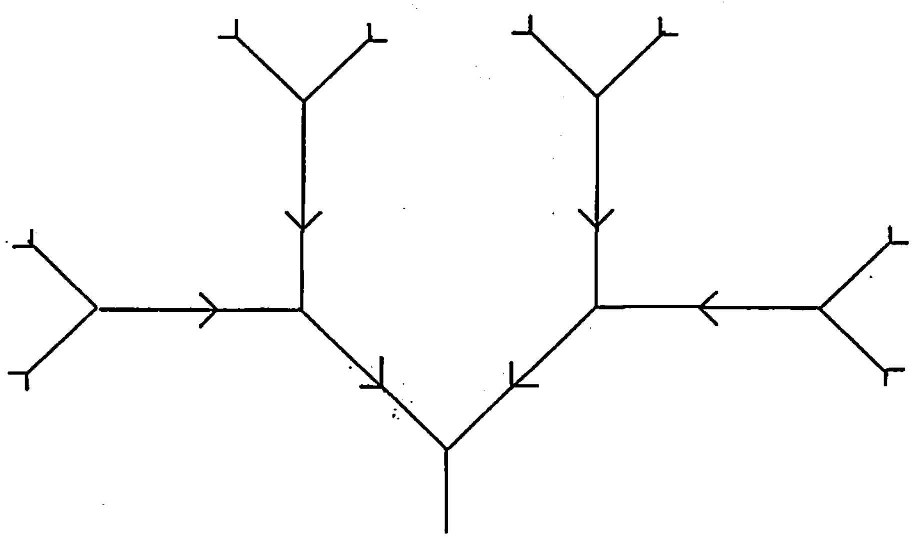


5

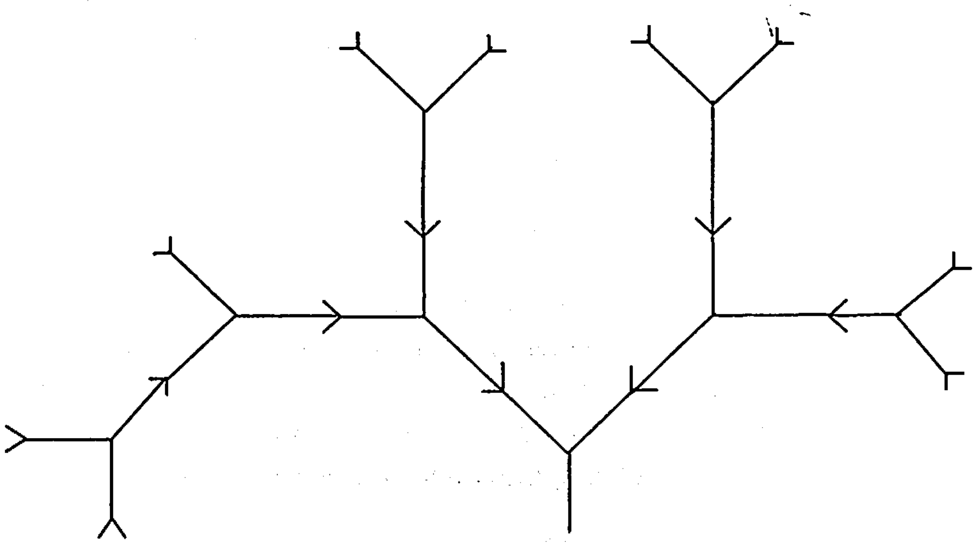
Figura | ***Número Asociado***



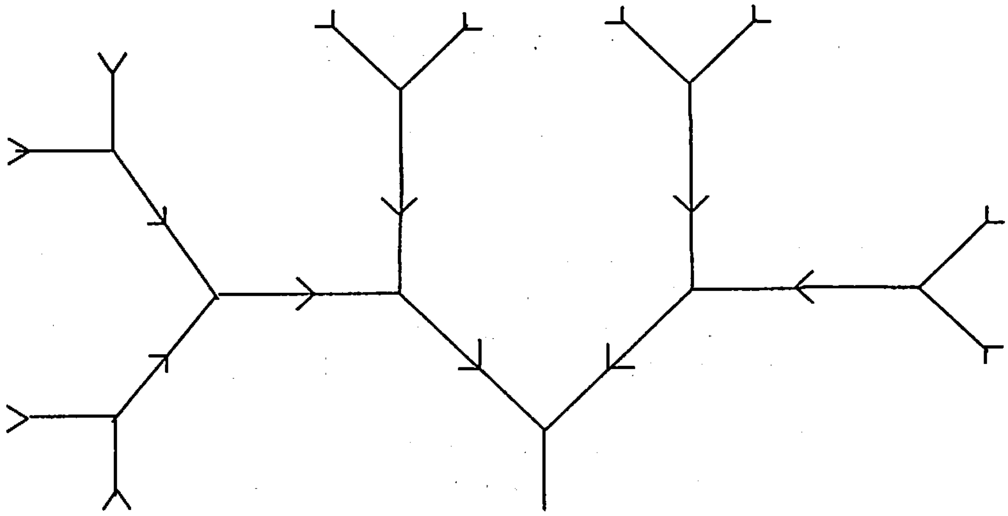
6



7



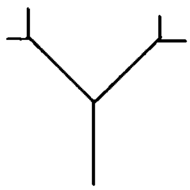
8



9

¿Podría imaginar cómo es la figura correspondiente al número 1000? No importa que su respuesta sea negativa, lo importante es que tiene ahora un "método" para construirla. Habría que partir de la figura asociada al número 1, ir una a una trazando las siguientes hasta llegar a la que corresponde al número 1000. Esto es lo que establece precisamente el quinto postulado de Peano; para alcanzar cualquier número natural es menester partir del uno y recorrer uno a uno los siguientes hasta alcanzar al número natural deseado.

Por otro lado, utilizando el ejemplo anterior, sea S el conjunto de números que tienen asociada una figura. Es claro que *1* pertenece a S, puesto que tiene asociada la figura



Además $1+1=2$ también pertenece a S; de igual modo $2+1=3$, $3+1=4$, $4+1=5$, etc. pertenecen a S; y, en general, si el número *"a"* está contenido en S entonces el número "$a+1$" también lo está; es decir si conocemos la figura asociada al número *"a"* entonces podemos conocer la figura que corresponde al número "$a+1$" ; luego según el quinto postulado S es el conjunto de los números naturales.

El quinto postulado de Peano, también conocido con frecuencia como "principio de inducción", es la base del método de demostración conocido como inducción matemática".

III. PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

III.1
NOTAS PREVIAS.

Para la ciencia es importante establecer generalizaciones o leyes que expliquen todo cuanto ocurre en la naturaleza. La importancia de la generalización radica en el hecho de poder manejar cada nuevo problema identificándolo simplemente como perteneciente al tipo de problemas cubiertos por la generalización.

Existen dos caminos para llegar a una generalización. El primero, consiste en considerar desde el principio el caso general mismo. El método de la lógica matemática llamado "deducción", trabaja de lo general a lo particular; la obtención de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado es un ejemplo de método deductivo. El segundo consiste en examinar un cierto número de casos particulares para descubrir la forma en que están relacionados. Una vez que se determina esta relación se le constituye en generalización. Se trabaja de lo particular a lo general, lo cual forma el método de la lógica matemática llamado "inducción".

El peligro de la inducción reside en que los casos particulares, sin importar cuán grande sea su número, pueden tener características especiales que hagan que una generalización basada en ellas pueda resultar errónea. El uso erróneo de la inducción es de frecuente ocurrencia en la vida cotidiana; por ejemplo, en los razonamientos de los empleados de una farmacia o de un gran número de personas con la automedicación. En matemáticas también es posible cometer errores si no se tiene el debido cuidado.

He aquí dos ejemplos desalentadores.

1) El estudio de los números del tipo

$$n^2 - n + 41 \; ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 40$$

(polinomio propuesto por Euler), es capaz de hacernos pensar que estos números son primos para cualquier n en el conjunto de los naturales

Si	$n = 1$	entonces	$1^2 - 1 + 41 = 41$	que es número primo.
Si	$n = 2$	entonces	$2^2 - 2 + 41 = 43$	que es número primo.
Si	$n = 3$	entonces	$3^2 - 3 + 41 = 47$	que es número primo.
	$\vdots$			
Si	$n = 40$	entonces	$40^2 - 40 + 41 = 1601$	que es número primo.

Sin embargo, si $n = 41$ entonces $41^2 - 41 + 41 = 41^2 = 1681$ que no es un número primo (1681 es divisible entre 41).

Parecería que 40 casos son más que suficientes para establecer la generalización de que todos los números de la forma $n^2 - n + 41$ son primos para toda n en los naturales. El caso de $n = 41$ ya no lo permite.

2) P. Fermat suponía que todos los números del tipo

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \; ; \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

(números de Fermat) eran primos. Los primeros cinco números de Fermat son primos, pero para $n = 5$, Euler encontró la descomposición

$$F_5 = 4\,294\,967\,297 = (641)(6700417)$$

lo cual muestra que F_5 no es un número primo.

Por fortuna en matemáticas es posible evitar el peligro de generalizaciones erróneas si se hace uso de un método de demostración llamado "inducción matemática".

III.2

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

El proceso de una demostración por inducción matemática consiste de los siguientes pasos:

0) Escribir claramente la proposición $P(n)$ cuya validez quiere demostrarse, especificando la variable de inducción y el conjunto de valores que puede asignarse a dicha variable. Por ejemplo, si se escribe $P(n)$, n representa la variable de inducción; si se escribe $P(m)$, m es la variable de inducción, o bien si se escribe $P(l)$, l es la mencionada variable; en general la letra contenida en el paréntesis de $P(\quad)$, denota la variable de inducción.

i) Si $P(n)$ es una proposición enunciada para todos los números naturales, se debe verificar el cumplimiento de la proposición para el menor valor de n (esto equivale a verificar que 1 pertenece a S, según el quinto postulado de Peano).

ii) Demostrar que si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ es verdadera (esto equivale a demostrar que si $k \in S$ entonces $k+1 \in S$ de acuerdo con el quinto postulado de Peano).

Cuando (i) y (ii) se cumplen, se concluye que $P(n)$ es verdadera para todo n en el conjunto de los números naturales.

Una de las fórmulas que suele demostrarse "por inducción" es

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esta fórmula, prácticamente aparece en todos los libros de matemáticas que tratan el tema de inducción matemática; sin embargo, no es fácil encontrar el razonamiento empleado en la obtención de dicha expresión.

Aunque el objetivo de este fascículo no es proporcionar los razonamientos matemáticos empleados para obtener cada proposición o fórmula a demostrarse por inducción, considero que resulta pedagógico ilustrar, el proceso de obtención de la fórmula anterior apoyándonos en algunas ideas matemáticas de la escuela pitagórica.

Los pitagóricos estudiaron ciertos números figurados a los que llamaron números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales, etc.

Por el momento detengámonos en los números figurados llamados "Triangulares":

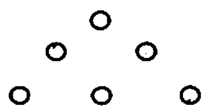
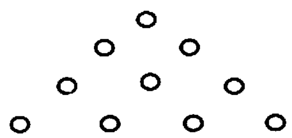
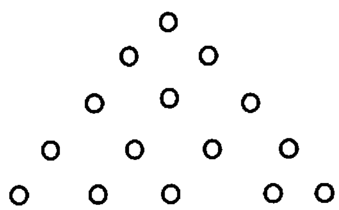
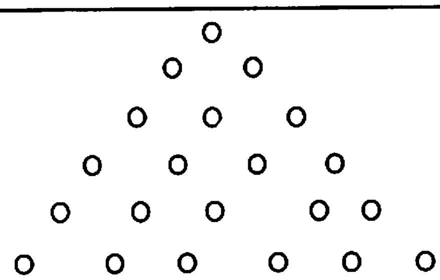
NÚMERO TRIANGULAR		
1		***1***
3		***2***
6		***3***
10		***4***
15		***5***
21		***6***
etc.		

Figura 1

Vemos que el segundo número triangular, el *3*, se obtiene agregando 2 al primero; el tercer triangular, el *6*, se obtiene adicionando *3* al segundo; el cuarto triangular, el *10*, se obtiene sumando *4* al tercero, y que, en general, el enésimo número triangular se obtiene agregando n puntos al que precede. De modo que

$$\begin{array}{r}
1 = 1 \\
1 + 2 = 3 \\
1 + 2 + 3 = 6 \\
\vdots \\
1 + 2 + 3 + \ldots + n = \text{enésimo número triangular} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)
\end{array}$$

Ahora, observemos la figura 2, para ver que el tercer número triangular, *6*, puede juntarse con el triangular anterior *3* y obtener el número nueve "que es el cuadrado de tres".

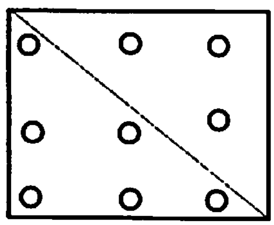


Figura 2

Análogamente, en la figura 3, se observa que el cuarto número triangular, *10*, puede juntarse con el triangular anterior *6* y obtener el número *16* "que es el cuadrado de *4*".

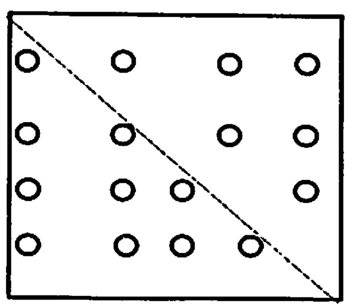


Figura 3

Con lo anterior, tenemos la pauta de la demostración del hecho siguiente:

Si T_n es el enésimo número triangular, entonces de *(1)*

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \;\dots\dots\dots\; (2)$$

además, como ya vimos el enésimo número triangular T_n se obtiene agregando n puntos al que le precede, es decir,

$$T_n = T_{n-1} + n \;\dots\dots\dots\; (3)$$

y también

$$T_n + T_{n-1} = n^2 \;\dots\dots\dots\; (4)$$

así que adicionando *(3)* y *(4)*, obtenemos

$$2\,T_n = n^2 + n$$

de aquí,

$$T_n = \frac{n^2 + n}{2}$$

luego,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

o bien,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Esta fórmula para la suma de los n primeros números naturales establecida en la Grecia clásica, recibe así una demostración geométrica. ¿No se dice, en un caso así, "veo clara la deducción"? Por otro lado ¿pudo imaginar, amigo lector, la antigüedad de esta fórmula?

Utilizando, ahora, el método de la "inducción matemática", procedamos a demostrar que la fórmula anterior es válida para todo número natural.

Las primeras preguntas que debemos hacernos al inicio de cada ejercicio son: ¿cuál es la proposición $p(\cdot)$ cuya validez desea demostrarse? ¿cuál es la variable de inducción? y ¿en qué conjunto ha sido enunciada dicha proposición?

En este caso la proposición $p(\cdot)$ es la propia fórmula, n es la variable de inducción y N .(conjunto de los números naturales) es el conjunto de valores que pueden asignarse a la variable n , de modo que podemos escribir:

$$\underbrace{P(n)}_{\textbf{VARIABLE DE INDUCCIÓN}} : \quad \underbrace{1+2+3+\ldots+\underbrace{n}_{\textbf{enésimo término}} = \frac{n(n+1)}{2}}_{\textbf{PROPOSICIÓN}} ; \qquad \forall\, n \in \underbrace{N}_{\textbf{CONJUNTO DE VALIDEZ}}$$

Demostración

i) Verifiquemos si $P(1)$ es verdadero

$$P(1): \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1$$

Por tanto $P(1)$ es verdadera

ii) Suponiendo que $P(k)$ es verdadera (hipótesis de inducción) se tiene que demostrar la validez de $P(k+1)$ (tesis del problema).

Hipótesis de inducción.

$$P(k) : \ 1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Tesis.

$$P(k+1) : \ 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)\ (k+2)}{2}$$

Una forma de resolver este tipo de ejercicios consiste en partir de la hipótesis, adicionar en ambos miembros el $(k+1)$ - ésimo término y desarrollar el miembro derecho resultante para obtener el miembro derecho de la Tesis. Observe el siguiente desarrollo.

Escribimos la hipótesis

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Adicionamos en ambos miembros el $(k+1)$ - ésimo término. En este caso el enésimo término es n; para determinar el $(k+1)$ - ésimo término se sustituye $k+1$ por n, de modo que el término buscado aquí es igual a $k+1$.

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

Desarrollando el miembro derecho de (1):

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

De (1) y (2) concluimos que

$$1 + 2 + 3 \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Por tanto, hemos demostrado que $P(k+1)$ es verdadera y la prueba termina.

Cabe aclarar que adicionar el $(k+1)$ - ésimo término no significa adicionar $k+1$ en ambos miembros.

De aquí en adelante se presentará una serie de ejercicios resueltos por el método de inducción matemática. Se ha cuidado que la serie contenga una gran variedad de ejercicios con diferentes grados de dificultad.

Ejercicio 1. Utilizando el método de inducción matemática, demostrar:

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^n = \frac{(-1)^n - 1}{2} \quad ; \quad \forall n \in N$$

Demostración

Nuevamente la proposición $P(\cdot)$ es la fórmula dada, n la variable de inducción y N el conjunto de validez.

$$P(n): \ (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + \underbrace{(-1)^n}_{\substack{\uparrow \\ \textbf{enésimo}}} = \frac{(-1)^n - 1}{2} \quad ; \quad \forall\, n \in N$$

i) ¿Es $P(1)$ verdadera?

$$P(1): \quad (-1)^1 = \frac{(-1)^1 - 1}{2}$$

$$-1 = \frac{-1-1}{2}$$

$$-1 = -1$$

$P(1)$ es verdadera

ii) Hipótesis de inducción.

$$P(k): \quad (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^k = \frac{(-1)^k - 1}{2}$$

Tesis

$$P(k+1): \quad (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^k + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} - 1}{2}$$

Partimos de la hipótesis

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^k = \frac{(-1)^k - 1}{2}$$

En el enésimo término $(-1)^n$, sustituimos $n = k+1$ para obtener el $(k+1)$-ésimo término, $(-1)^{k+1}$ Adicionamos este término en ambos miembros de la hipótesis

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^k + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k - 1}{2} + (-1)^{k+1} \dots (1)$$

Desarrollamos el miembro derecho

$$\frac{(-1)^k-1}{2}+(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^k-1+2(-1)^{k+1}}{2}$$

$$=\frac{(-1)^k-1+2(-1)^k(-1)}{2}$$

$$\frac{(-1)^k-1}{2}+(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^k\ \big(1+(-2)\big)-1}{2}$$

$$=\frac{(-1)^k(-1)-1}{2}$$

$$\frac{(-1)^k-1}{2}+(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}-1}{2} \quad ....(2)$$

Por (1) y (2)

$$(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^k+(-1)^{k+1}=\frac{(-1)^{k+1}-1}{2}$$

la tesis queda demostrada. Luego $P(n)$ es válida para toda n en los naturales.

Ejercicio 2. Demostrar, por inducción matemática, que:

$$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\left[a+(n-1)d\right]=\frac{n\left[2a+(n-1)d\right]}{2}$$

para $n=1,2,3,\ldots$

Demostración

Note que $n=1,2,3,\ldots$ indica además que el conjunto de validez es el de los naturales y que la inducción se aplica sobre la variable n

i) Validez de $P(1)$

$$P(1):\quad a=\frac{1\left[2a+(1-1)d\right]}{2}$$

$$a=a$$

$P(1)$ es verdadera

ii) Hipótesis de inducción

$$P(k): \quad a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\left[a+(k-1)d\right]=\frac{k\left[2a+(k-1)d\right]}{2}$$

Tesis

$$P(k+1): \quad a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\left[a+(k-1)d\right]+\left[a+\left((k+1)-1\right)d\right]=\frac{(k+1)\left[2a+\left((k+1)-1\right)d\right]}{2}$$

o bien

$$P(k+1): \quad a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\left[(a+(k-1)\right]+\left[(a+kd)\right]=\frac{(k+1)\left[2a+kd\right]}{2}$$

Iniciamos con la hipótesis de inducción

$$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\left[(a+(k-1)d\right]=\frac{k\left[2a+(k-1)d\right]}{2}$$

Adicionamos en ambos miembros el $(k+1)$ - ésimo término

$$a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\left[(a+(k-1)d\right]+\left[(a+kd)\right]=\frac{k\left[2a+(k-1)d\right]}{2}+\left[a+kd\right]\ldots(1)$$

Desarrollando el miembro derecho

$$\begin{aligned}\frac{k\left[2a+(k-1)d\right]}{2}+\left[a+kd\right]&=\frac{k\left[2a+(k-1)d\right]+2\left[a+kd\right]}{2}\\&=\frac{k\left[2a+kd-d\right]+2\left[a+kd\right]}{2}\\&=\frac{k\left[2a+kd\right]-kd+2a+2kd}{2}\\&=\frac{k\left[2a+kd\right]+\left[2a+kd\right]}{2}\end{aligned}$$

$$\frac{k\left[2a+(k-1)d\right]}{2}+\left[a+kd\right]=\frac{(k+1)(2a+kd)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

Por (1) y (2) la tesis queda demostrada y la prueba concluye. $P(n)$ es válida para $n=1,2,3,\ldots$

Ejercicio 3. Demostrar por inducción matemática que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad \forall\, n \in N$$

Demostración

$$P(n): \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad \forall\, n \in N$$

i) Verificamos la validez de $P(1)$

$$P(1): \quad \frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$P(1)$ es válida

ii) Hipótesis de inducción

$$P(k): \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

Tesis

$$P(k+1): \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Reescribimos la hipótesis de inducción

$$P(k+1): \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

Adicionamos en ambos lados el $(k+1)$ - ésimo término

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad \ldots\ldots(1)$$

Desarrollamos el miembro derecho

$$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

De (1) y (2)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

la tesis queda demostrada.

Ejercicio 4. Utilizando el método de inducción matemática, demostrar que:

$$\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x \ldots\ldots\ldots \cos 2^{n-1}x=\frac{\operatorname{sen} 2^n x}{2^n \operatorname{sen} x} \qquad \forall\, n\in N$$

Demostración

$P(n)$: $\quad \cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x \ldots\ldots\ldots \cos 2^{n-1}x=\dfrac{\operatorname{sen} 2^n x}{2^n \operatorname{sen} x} \qquad \forall\, n\in N$

Aunque la proposición no consiste de una suma sino de una multiplicación de términos, el mecanismo de demostración es análogo al de los ejercicios previos.

i) Verificamos la validez de $P(1)$.

$$P(1): \qquad \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 \operatorname{sen} x}$$

$$\cos x = \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2 \operatorname{sen} x} \qquad , \textit{como} \ \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos x = \cos x$$

$P(1)$ es verdadera

ii) Hipótesis de inducción.

$$P(k): \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \ldots \cos 2^{k-1} x = \frac{\operatorname{sen} 2^k x}{2^k \operatorname{sen} x}$$

Tesis

$$P(k+1): \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \ldots \cos 2^{k-1} x \cdot \cos 2^k x = \frac{\operatorname{sen} 2^{k+1} x}{2^{k+1} \operatorname{sen} x}$$

Reescribimos la hipótesis

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \ldots \cos 2^{k-1} x = \frac{\operatorname{sen} 2^k x}{2^k \operatorname{sen} x}$$

Ahora, en vez de adicionar, multiplicamos en ambos miembros por el $(k+1)$-ésimo término.

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \ldots \cos 2^{k-1} x \cdot \cos 2^k x = \frac{\operatorname{sen} 2^k x}{2^k \operatorname{sen} x} \cdot \cos 2^k x \qquad \ldots (1)$$

Desarrollando el miembro derecho

$$\frac{sen\, 2^k x}{2^k\, sen x} \cdot \cos 2^k x = \frac{sen\, 2^k x \cos 2^k x}{2^k\, sen x}$$

$$= \frac{2sen\, \left(2^k x\right) \cos\left(2^k x\right)}{2 \cdot 2^k\, sen x}; \left(sen 2\alpha = 2 sen \alpha \cos \alpha\right)$$

$$= \frac{sen\left(2\left(2^k x\right)\right)}{2^{k+1}\, sen x}$$

$$\frac{sen\, 2^k x}{2^k\, sen x} \cdot \cos 2^k x = \frac{sen\, 2^{k+1} x}{2^{k+1}\, sen x} \qquad \ldots (2)$$

Por (1) y (2) queda demostrada la tesis y la prueba termina.

Ejercicio 5. Aplicar el método de inducción matemática para demostrar que:

$$1 - 4 + 9 - 16 + \ldots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \quad \forall\, n \in N$$

Demostración

$P(n)$ es la fórmula que se pide demostrar.

Anteriormente se demostró que la suma de los n primeros números naturales es igual a $n(n+1)/2$. Usando este resultado $P(n)$ se reescribe como sigue:

$$P(n): \; 1 - 4 + 9 - 16 + \ldots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

i) Verificamos la validez de $P(1)$

$$P(1): \quad 1 = (-1)^{1+1} \left(\frac{1(1+1)}{2} \right)$$

$$1 = 1$$

$P(1)$ es verdadera.

ii) Hipótesis de inducción

$$P(k): \; 1 - 4 + 9 - 16 + \ldots + (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{k+1} \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)$$

Tesis

$$P(k+1):\ 1-4+9-16+\dots+(-1)^{k+1}k^2+(-1)^{k+2}(k+1)^2=(-1)^{k+2}\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)$$

Iniciamos con la hipótesis de inducción

$$1-4+9-16+\dots+(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{k+1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)$$

Adicionamos el $(k+1)$ - ésimo término en ambos miembros

$$1-4+9-16+\dots+(-1)^{k+1}k^2+(-1)^{k+2}(k+1)^2=(-1)^{k+1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}(k+1)^2$$

Operando sobre el miembro derecho

$$\begin{aligned}(-1)^{k+1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}(k+1)^2 &= \frac{(-1)(-1)(-1)^{k+1}k(k+1)}{2}+(-1)^{k+2}(k+1)^2\\ &=\frac{(-1)^{k+2}(-1)k(k+1)}{2}+(-1)^{k+2}(k+1)^2\\ &=(-1)^{k+2}(k+1)\left(\frac{-k}{2}+k+1\right)\\ &=(-1)^{k+2}(k+1)\left(\frac{-k+2k+2}{2}\right)\\ &=(-1)^{k+2}(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)\end{aligned}$$

$$(-1)^{k+1}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+(-1)^{k+2}(k+1)^2=(-1)^{k+2}\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)$$

luego

$$1-4+9-16+\dots+(-1)^{k+1}k^2+(-1)^{k+2}(k+1)^2=(-1)^{k+2}\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)$$

es decir queda demostrada la tesis y la prueba concluye.

Ejercicio 6. Demostrar por inducción matemática que $6^n - 1$ es divisible entre 5 para todo n en los naturales.

Demostración

Este es otro tipo de ejercicio cuya demostración exige un tratamiento diferente al de los anteriores. Aquí la proposición a demostrar es

$P(n)$: "$6^n - 1$ es divisible entre 5", $\forall\, n \in N$

observe que $P(n)$ puede reescribirse como sigue

$P(n)$: $6^n - 1 = 5p$, $p \in N$; $\forall\, n \in N$

Es decir si $6^n - 1$ es divisible entre 5, existe un natural p tal que $6^n - 1$ sea igual a $5p$.

i) ***¿ Es verdadera*** $P(1)$ ***?***

En estos casos, para escribir $P(1)$ basta con sustituir $n = 1$ en la igualdad $6^n - 1 = 5p$. Luego,

$P(1)$: $6^1 - 1 = 5p$, $p \in N$

$\quad$ $con\ p = 1$

$\quad$ $6^1 - 1 = 5(1)$

luego, existe un natural, a saber $p = 1$, tal que $6^1 - 1 = 5p$. $P(1)$ es verdadera.

ii) Hipótesis de inducción.

$P(k)$: $6^k - 1 = 5p$, $p \in N$; para algún k en N.

Es importante mencionar que la suposición $6^k - 1 = 5p$, $p \in N$ indica que existe un natural p para el cual se cumple la igualdad; p es un dato del problema.

Tesis

$P(k+1): \quad 6^{k+1} - 1 = 5m, \quad m \in N$

Si $6^{k+1} - 5$ es divisible entre 5 entonces necesitamos investigar si existe un entero m que satisfaga $P(k+1)$; m es una incógnita del problema.
Escribimos la hipótesis

$$6^{k} - 1 = 5p$$

multiplicando en ambos miembros por 6 y desarrollando,

$$\begin{aligned}
6(6^{k}-1) &= 6(5p)\\
6^{k+1}-6 &= 6(5p)\\
6^{k+1}-6 &= 5(6p)\\
6^{k+1}-1-5 &= 5(6p)\\
6^{k+1}-1 &= 5(6p)+5\\
6^{k+1}-1 &= 5(6p+1).\, Si\; m=(6p+1)\in N\\
6^{k+1}-1 &= 5m
\end{aligned}$$

Por tanto, determinamos al natural m, a saber $m = 6p+1$, que demuestra la tesis $P(k+1)$.

$P(n)$ es válida para toda n en los naturales.

Ejercicio 7. Demostrar que si n es un número natural cualquiera, entonces $\frac{1}{6}\left(2n^{3} + 3n^{2} + n\right)$ es un natural.

Demostración

$P(n): \quad \frac{1}{6}\left(2n^{3} + 3n^{2} + n\right) \in N, \quad \forall\, n \in N$

i) *Verificación de la validez de* $P(1)$

$P(1): \ \frac{1}{6}\left(2(1)^3 + 3(1)^2 + 1\right) = 1 \in N$

$P(1)$ es verdadera

ii) Hipótesis de inducción.

$P(k): \ \frac{1}{6}\left(2k^3 + 3k^2 + k\right) \in N$, para algún k en los naturales.

Demostración

$P(k+1): \ \frac{1}{6}\left(2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + (k+1)\right) \in N$

En esta clase de ejercicios se sugiere desarrollar la tesis y usar en alguno de los pasos la hipótesis de inducción, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\left(2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + (k+1)\right) &= \frac{1}{6}\left(2(k^3+3k^2+3k+1)+3(k^2+2k+1)+k+1\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(2k^3+6k^2+6k+2+3k^2+6k+3+k+1\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(2k^3+3k^2+k\right)+\frac{1}{6}\left(6k^2+12k+6\right)\\
\frac{1}{6}\left(2(k+1)^3+3(k+1)^2+(k+1)\right) &= \frac{1}{6}\left(2k^3+3k^2+k\right)+\left(k^2+2k+1\right)
\end{aligned}$$

Observe que $\frac{1}{6}\left(2k^3+3k^2+k\right)$ es un natural por hipótesis de inducción y como $k \in N$ $\left(k^2+2k+1\right)$ también es un natural; en consecuencia $\frac{1}{6}\left(2(k+1)^3+3(k+1)^2+(k+1)\right)$ pertenece a los naturales. Por tanto $P(n)$ es válida para todo n natural.

Ejercicio 8. Aplicar inducción matemática sobre n para demostrar que para cualquier número real $p \geq 0$ y cualquier número natural $(1+p)^n \geq 1+np+\frac{n(n-1)p^2}{2}$

Solución.

$$P(n): \quad (1+p)^n \geq 1 + np + \frac{n(n-1)p^2}{2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

i) ¿ $P(n)$ es válida para $n = 1$?

$$P(1): \quad (1+p)^1 \geq 1 + (1)p + \frac{1(1-1)p^2}{2}$$

$$(1+p) \geq 1 + p$$

$P(n)$ es válida para $n = 1$

ii) Hipótesis de inducción.

$$P(k): \quad (1+p)^k \geq 1 + kp + \frac{k(k-1)p^2}{2}$$ para algún k en los naturales.

Demostración

$$P(k+1): \quad (1+p)^{k+1} \geq 1 + (k+1)p + \frac{(k+1)kp^2}{2}$$

Procedemos como en el ejercicio anterior

$$\begin{aligned}
(1+p)^{k+1} &= (1+p)(1+p)^k \\
&\geq (1+p)\left(1+kp+\frac{k(k-1)p^2}{2}\right) \quad \text{(por hipótesis de inducción)} \\
&= 1+kp+\frac{k(k-1)p^2}{2} + p + kp^2 + \frac{k(k-1)p^3}{2} \\
&= 1+(k+1)p+\left(\frac{k(k-1)}{2}+k\right)p^2 + \frac{k(k-1)p^3}{2} \\
&= 1+(k+1)p+\left(\frac{k^2-k+2k)}{2}\right)p^2 + \frac{k(k-1)p^3}{2} \\
&= 1+(k+1)p+\left(\frac{k^2+k}{2}\right)p^2 + \frac{k(k-1)p^3}{2} \\
&= 1+(k+1)p+\frac{(k+1)k\,p^2}{2} + \frac{k(k-1)\,p^3}{2} \qquad \left(\frac{k(k-1)p^3}{2} \geq 0\right) \\
&\geq 1+(k+1)p+\frac{(k+1)kp^2}{2}
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que

$$(1+p)^{k+1} \geq 1+(k+1)p+\frac{(k+1)kp^2}{2}$$

y $P(n)$ se cumple para todo n en los naturales.

Ejercicio 9. Demuéstrese que: si $x<0$ y n es un número natural cualquiera, entonces $x^{2n-1}<0$

Demostración

Demostración por inducción matemática

$$P(n): \quad x^{2n-1}<0; \qquad n=1,2,3,\ldots$$

i) $P(1): x^{2(1)-1}<0$

$$x^1<0$$
$$x<0$$

$P(1)$ es verdadera

ii) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótesis de inducción

$P(k): \quad x^{2k-1}<0$ para algún k en los naturales.

Tesis.

$P(k+1): \quad x^{2k+1}<0$

Reescribimos la hipótesis de inducción

$x^{2k-1}<0 \ldots\ldots (1)$

Como $x<0$ entonces $x^2>0$

Multiplicando en ambos miembros de (1) por x^2,

$$x^2(x^{2k-1}) < x^2(0)$$
$$x^{2+2k-1} < 0$$
$$x^{2k+1} < 0$$

La tesis queda demostrada. $P(n)$ es válida para cualquier natural n.

Ejercicio 10. Demuestre que $2^m \geq 1+m$ para todo m en los naturales.

Demostración

$P(m)$: $2^m \geq 1+m$, $\forall\, m \in N$

i) ¿Es cierto que $2^m \geq 1+m$ cuando $m=1$?

$$P(1): \quad 2^1 \geq 1+1$$
$$2 = 2$$

Por tanto $P(1)$ es verdadera.

ii) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótesis de inducción

$P(k)$: $2^k \geq 1+k$ para algún k en N

Tesis

$P(k+1)$: $2^{k+1} \geq 1+(k+1)$

Suponemos que

$$2^k \geq 1+k$$

multiplicado por 2 en ambos miembros

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 2^{k} &\geq 2(1+k) \\
2^{k+1} &\geq 2(1+k) \\
&= (1+k)+(1+k) \\
&> 1+(1+k) \quad (\text{ya que } 1+k>1) \\
2^{k+1} &\geq 1+(k+1)
\end{aligned}
$$

por tanto $P(k+1)$ es verdadera y $P(m)$ se cumple para todo número m en los naturales.

Ejercicio 11. Demostrar, por inducción matemática, que $(a/b)^n = a^n/b^n$ se cumple para todo n en números naturales.

Demostración

$$P(n): \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \qquad \forall\, n \in N$$

i) Verificación cuando $n=1$

$$P(1): \quad \left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a^1}{b^1}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a^1}{b^1} = \frac{a}{b}$$

Por tanto $P(1)$ es verdadera

ii) Hipótesis de inducción

$$P(k): \quad \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$$

Tesis

$$P(k+1): \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}$$

Suponemos que $P(n)$ es cierta para $n = k$ necesitamos demostrar que $P(n)$ es válida cuando $n = k + 1$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k} = \frac{a^{k}}{b^{k}}$$

multiplicamos por $\frac{a}{b}$ en ambos miembros

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^{k}}{b^{k}} \cdot \frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \frac{a^{k} \cdot a}{b^{k} \cdot b}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} = \frac{a^{k+1}}{b^{k+1}}$$

con esto, la tesis queda demostrada y $P(n)$ es válida para todo n natural.

Ejercicio 12. Utilizando inducción matemática, demostrar que $2n \leq 2^{n}$ para todo n natural.

Demostración

$P(n): \qquad 2n \leq 2^{n} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

i) ¿Es $P(1)$ verdadera?

$$P(n): \qquad 2(1) \leq 2^{1}$$
$$2 = 2$$

$P(1)$ es verdadera

ii) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótesis de inducción: $2k \leq 2^k$

Tesis

$2(k+1) \leq 2^{k+1}$
Por hipótesis de inducción

$$2k \leq 2^k$$

multiplicando por 2 en ambos miembros

$$2(2k) \leq 2^{k+1}$$

ahora

$$1 \leq k$$
$$k+1 \leq 2k$$
$$2(k+1) \leq 2(2k)$$

como consecuencia, si $2(k+1) \leq 2(2k)$ y $2(2k) \leq 2^{k+1}$ por transitividad $2(k+1) \leq 2^{k+1}$, lo cual prueba la tesis y la demostración concluye.

Ejercicio 13. Demostrar por inducción matemática, que :

$$\frac{m^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2$$

se cumple en los naturales

Demostración

$$P(m): \frac{m^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 \quad ; \qquad \forall\, m \in N$$

i) Verificación para $m = 1$

$$P(1):\quad \frac{1^3}{3} < 1^2$$

$$\frac{1}{3} < 1^2$$

$P(1)$ es verdadera

ii) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótesis de inducción

$$P(k):\quad \frac{k^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2$$, para algún k en N

Tesis

$$P(k+1):\quad \frac{(k+1)^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$$

Suponemos que

$$\frac{k^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2$$

Adicionamos $(k+1)^2$ en ambos lados de la hipótesis de inducción.

$$\frac{k^3}{3} + (k+1)^2 < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$$

Si demostramos que

$$\frac{(k+1)^3}{3} < \frac{k^3}{3} + (k+1)^2$$

la tesis quedará demostrada.

Desarrollando en ambos miembros de la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} k^3 + 3k^2 + 3k + 1 &< k^3 + 3k^2 + 6k + 3 \\ 3k + 1 &< 6k + 3 \\ -2 &< 3k \end{aligned}$$

Como $-2 < 3k$, $\forall\ k \geq 1$ entonces $\dfrac{(k+1)^3}{3} < \dfrac{k^3}{3} + (k+1)^2$

luego

$$\frac{(k+1)^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$$

$P\ (k+1)$ es verdadera y $P\ (m)$ se satisface para cualquier número m en los naturales.

Ejercicio 14. Demostrar, por inducción matemática, que:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1$$

se cumple para todo n en los naturales.

Demostración

$P(n):\qquad \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1, \qquad \forall\ n \in N$

i) Verificación de $P\ (1)$

$P(1):\qquad \left(1+\frac{1}{1}\right) = 1+1$

$$2 = 2$$

$P(1)$ es verdadera.

ii) Hipótesis de inducción

$P(k):\qquad \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right) = k+1$ para algún k en N.

Tesis

$P(k+1):\qquad \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1)+1$

Partimos de la hipótesis

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right) = k+1$$

multiplicamos en ambos miembros por el $(k+1)$ - ésimo término que es $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1)+1$$

La tesis queda demostrada y $P(n)$ es válida para toda n en N.

Ejercicio 15. Demostrar que si $\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$, entonces $\tan(\theta+n\pi) = \tan\theta$ para todo número natural n.

Demostración

$P(n):\qquad \tan(\theta+n\pi) = \tan\theta, \qquad \forall\, n \in N$

i) $P(1)$: $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$
$P(1)$ es verdadera.

ii) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótesis de inducción

$P(k)$: $\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$

Tesis

$P(k+1)$: $\tan(\theta + (k+1)\pi) = \tan\theta$

Por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \tan(\theta + k\pi) \\ &= \tan\left[(\theta + k\pi) + \pi\right] \\ &= \tan\left[(\theta + (k\pi + \pi)\right] \\ &= \tan\left[(\theta + (k+1)\pi\right] \end{aligned}$$

Por tanto, es cierto que $\tan(\theta + (k+1)\pi) = \tan\theta$. Luego $P(n)$ se cumple para todo n en los naturales.

Ejercicio 16. Demostrar que $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \dfrac{a_{n+1} - a_1}{q-1}$, $(q \neq 1)$, para todo n en N si· $a_{i+1} = a_i q$ para todo i.

Demostración

$$P(n): \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q-1}, \qquad \forall n \in N$$

i) Verificación de $P(n)$ para $n = 1$

$P(1):\qquad a_1 = \dfrac{a_2 - a_1}{q-1}$

como $a_{i+1} = a_i q$ para todo i, si $i = 1$ entonces $a_2 = a_1 q$, luego

$$a_1 = \frac{a_1 q - a_1}{q-1}$$

$$a_1 = \frac{a_1(q-1)}{q-1}$$

$$a_1 = a_1$$

$P(1)$ es verdadera

ii) $\quad P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótesis de inducción

$P(k):\qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = \dfrac{a_{k+1} - a_1}{q-1}$ para algún k en N.

Tesis

$P(k+1):\qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1} = \dfrac{a_{k+2} - a_1}{q-1}$

Por hipótesis

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = \frac{a_{k+1} - a_1}{q-1}$$

Adicionando en ambos miembros a_{k+1},

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} &= \frac{a_{k+1} - a_1}{q-1} + a_{k+1} \\
&= \frac{a_{k+1} - a_1 + (q-1)\, a_{k+1}}{q-1} \\
&= \frac{a_{k+1} - a_1 + q\, a_{k+1} - a_{k+1}}{q-1} \\
&= \frac{q a_{k+1} - a_1}{q-1} \quad (a_{i+1} = a_i q \quad \Rightarrow \quad a_{k+2} = a_{k+1} q \quad con \quad i = k+1) \\
&= \frac{a_{k+2} - a_1}{q-1}
\end{aligned}
$$

Por tanto $P(k+1)$ es verdadera y $P(n)$ es válida en N.

Ejercicio 17. Demostrar por inducción matemática que la proposición

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

es válida para todos los naturales.

Demostración

$$P(n): \quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}, \quad \forall\, n \in N$$

i) $P(1)$:

$$
\begin{aligned}
1^4 &= \frac{6(1)^5 + 15(1)^4 + 10(1)^3 - (1)}{30} \\
1^4 &= \frac{30}{30} \\
1 &= 1
\end{aligned}
$$

Se verifica $P(n)$ para $n = 1$

ii) $P(k) \quad \Rightarrow \quad P(k+1)$

Hipótesis de inducción.

$P(k)$: $\quad 1^4+2^4+3^4+\ldots+k^4=\dfrac{6k^5+15k^4+10k^3-k}{30}$ para algún k en N

Tesis

$P(k+1)$: $\quad 1^4+2^4+3^4+\ldots+k^4+(k+1)^4=\dfrac{6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1)}{30}$

Por hipótesis de inducción.

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+k^4=\frac{6k^5+15k^4+10k^3-k}{30}$$

Adicionando en ambos miembros el $(k+1)$ - ésimo término

$$\begin{aligned}
1^4+2^4+3^4+\ldots+k^4+(k+1)^4 &= \frac{6k^5+15k^4+10k^3-k}{30}+(k+1)^4\\
&= \frac{6k^5+15k^4+10k^3-k+30(k+1)^4}{30}\\
&= \frac{6k^5+15k^4+10k^3-k+30(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)}{30}\\
&= \frac{6k^5+15k^4+10k^3-k+30k^4+120k^3+180k^2+120k+30}{30}\\
&= \frac{6(k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1)+15(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)}{30}\\
&\quad+\frac{10(k^3+3k^2+3k+1)-(k+1)}{30}
\end{aligned}$$

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+k^4+(k+1)^4=\frac{6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1)}{30}$$

$P(k+1)$ es verdadera y $P(n)$ es válida para todo n en los naturales.

Ejercicio 18. Demostrar que para todo número natural n, $z^n = r^n \; cis(n\theta)$ si $z = r \; cis\,\theta$.

Demostración

$P(n): \quad z^n = r^n \; cis(n\theta), \qquad \forall n \in N$

i) Con $n = 1$

$P(n): \quad z^1 = r^1 cis(1 \cdot \theta)$

$\qquad\qquad z = r \; cis\,\theta$

$P(1)$ es verdadera

ii) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótesis de inducción

$P(k): \quad z^k = r^k \, cis\, k\theta$ para algún $k \in N$

Por hipótesis

$z^k = r^k \; cis(k\theta)$

multiplicando en ambos miembros por $z = r \; cis\,\theta$

$z^k \cdot z = r^k \; cis\,(k\theta) \cdot r\,cis\,(\theta)$
$z^{k+1} = r^{k+1} cis\,(k\theta + \theta)$
$z^{k+1} = r^{k+1} cis\,((k+1)\theta)$

$P(k+1)$ es verdadera y $P(n)$ se cumple para todo número natural n.

Ejercicio 19. Sean A y B matrices de orden n tales $AB = BA$ (a este tipo de matrices se les llama permutables). Demostrar que $AB^n = B^n A$ para todo número natural n .

Demostración

$P(n): \quad AB^n = B^n A \,, \qquad \forall\, n \in N$

i) Para $n = 1$

$$P(1): \quad AB^1 = B^1 A$$
$$AB = BA$$

$P(1)$ es verdadera

ii) Hipótesis de inducción

$P(k): AB^k = B^k A$ para algún k en N

Tesis

$P(k+1): \quad AB^{k+1} = B^{k+1} A$

$AB^k = B^k A$ (por hipótesis de inducción)

Postmultiplicando por B en ambos miembros

$(AB^k)B = (B^k A)B$

Empleando la propiedad asociativa para la multiplicación de matrices

$A(B^k B) = B^k (AB)$

como $AB = BA$

$A(B^{k+1}) = B^k (BA)$

aplicando nuevamente asociatividad en el miembro derecho

$A B^{k+1} = B^{k+1} A$

En consecuencia

$A B^{k+1} = B^{k+1} A$

$P(k+1)$ es verdadera y $P(n)$ se cumple para todo número natural n .

Ejercicio 20. Sea $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Demostrar por inducción matemática que $A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\text{sen}\ (n\theta) \\ \text{sen}\ (n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$ para todo número natural n .

Demostración

$P(n):$ $\quad A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\text{sen}\ (n\theta) \\ \text{sen}\ (n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$, $\quad \forall\ n \in N$

i) Para $n = 1$

$P(1):$ $\quad A^1 = \begin{pmatrix} \cos(1\theta) & -\text{sen}\ (1\theta) \\ \text{sen}\ (1\theta) & \cos(1\theta) \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$P(1)$ es verdadera.

ii) Hipótesis de inducción

$P(k):$ $\quad A^k = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\text{sen}\ (k\theta) \\ \text{sen}\ (k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$ para algún k en N

Tesis

$P(k+1)$: $$A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos((k+1)\theta) & -\operatorname{sen}((k+1)\theta) \\ \operatorname{sen}((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{pmatrix}$$

Por hipótesis de inducción

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\operatorname{sen}(k\theta) \\ \operatorname{sen}(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$$

Postmultiplicando en ambos miembros por la matriz A

$$A^k A = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\operatorname{sen}(k\theta) \\ \operatorname{sen}(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos(k\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}(k\theta)\operatorname{sen}\theta & -\cos(k\theta)\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}(k\theta)\cos\theta \\ \operatorname{sen}(k\theta)\cos\theta + \cos(k\theta)\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}(k\theta)\operatorname{sen}\theta + \cos(k\theta)\cos\theta \end{pmatrix}$$

Haciendo uso de las identidades trigonométricas

$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha$

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos((k\theta) + \theta) & -\operatorname{sen}((k\theta) + \theta) \\ \operatorname{sen}((k\theta) + \theta) & \cos((k\theta) + \theta) \end{pmatrix}$$

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} \cos((k+1) + \theta) & -\operatorname{sen}((k+1) + \theta) \\ \operatorname{sen}((k+1) + \theta) & \cos((k+1) + \theta) \end{pmatrix}$$

$P(k+1)$ es verdadera. $P(n)$ se cumple para todo número natural n.

En los ejercicios anteriores, las proposiciones han sido ciertas para todo número natural n. Sin embargo, existen proposiciones cuyo conjunto de validez es algún subconjunto de los números naturales; por ejemplo la desigualdad $2^n > 10$ es válida para todo número natural n mayor o igual a cuatro. En estos casos el método de inducción matemática se aplica como se indica a continuación.

Sea $P(n)$ la proposición que se quiere demostrar. $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_1$, $n_1 \in N$

i) $P(n_1)$ es cierta.

ii) Suponiendo que $P(k)$ es verdadera para algún k en los naturales mayor o igual a $n_1 (k \geq n_1)$, entonces $P(k+1)$ es verdadera.

En los ejercicios previos n_1 fue siempre igual a uno.

En los siguientes ejercicios se demuestra la veracidad de $P(\cdot)$ para el subconjunto de los naturales que se especifica en cada uno de ellos.

Ejercicio 21. Demostrar, por inducción matemática, la validez de la proposición:

$$P(n): \quad \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, \qquad \forall n \in N, \quad n \geq 2$$

Demostración

i) Verificamos la validez de $P(n_1 = 2)$.

$$P(2): \quad \left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{2+1}{2(2)}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$P(2)$ es verdadera.

ii) Hipótesis de inducción.

$$P(k): \quad \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k} \quad \text{para algún } k \geq 2$$

Tesis

$$P(k+1): \quad \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

Multiplicando la hipótesis de inducción en ambos miembros de la igualdad por $1-\dfrac{1}{(k+1)^2}$ se tiene

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\left(\frac{k+1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\ \ldots\ (1)$$

Desarrollando el miembro derecho

$$\begin{aligned}\left(\frac{k+1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \frac{k+1}{2k}-\frac{1}{2k(k+1)}\\ &= \frac{(k+1)^2-1}{2k(k+1)}\\ &= \frac{k^2+2k+1-1}{2k(k+1)}\\ &= \frac{k^2+2k}{2k(k+1)}\\ &= \frac{k(k+2)}{2k(k+1)}\\ &= \frac{k+2}{2(k+1)}\quad \ldots\ (2)\end{aligned}$$

De (1) y (2) se concluye que $P(k+1)$ es verdadera. Por tanto $P(n)$ es válida para todo número natural $n \geq 2$.

Ejercicio 22. Demuestre la validez de la proposición:
$P(n):\quad n+7<n^2,\ n\geq 4,\ n\in N.$

Demostración

i.) $P(n_1=4):\ 4+7<4^2$

$11<16$

$P(4)$ es verdadera

ii) Hipótesis de inducción

$P(k):\ k+7<k^2$ para algún $k\geq 4 \ \Rightarrow\ P(k+1):\ k+8<(k+1)^2$

Por hipótesis

$k+7<k^2$

Adicionando uno en ambos miembros de esta desigualdad

$$k+7+1<k^2+1$$
$$k+8<k^2+1$$

como $k\geq 4$ entonces $k^2+1<k^2+2k+1$, por lo que $k+8<k^2+1<k^2+2k+1$

por transitividad

$$k+8<k^2+2k+1$$
$$k+8<(k+1)^2$$

La tesis queda demostrada.

Ejercicio 23. Demostrar con el método de inducción matemática la validez de la proposición

$$P(n):\ 1+2n<3^n \qquad \forall n\geq 2,\quad n\in N$$

Demostración

i) $P(n_1=2):\ 1+2(2)<3^2$

$$5<9$$

$P(2)$ es verdadera

ii) Hipótesis de inducción

$P(k):\ 1+2k<3^k$ para algún k en N, $k\geq 2$

Tesis

$P(k+1): 1+2(k+1) < 3^{k+1}$

Suponemos que

$1+2k < 3^k$

Multiplicamos por 3 en ambos miembros de la desigualdad

$$(1+2k)(3) < 3^k \cdot 3$$
$$3+6k < 3^{k+1}$$

Dado que $k \in N, \quad k \geq 2$

$2 < 6 \Rightarrow 2k < 6k \Rightarrow 3+2k < 3+6k$

así,

$3+2k < 3+6k < 3^{k+1}$

Por transitividad

$$3+2k < 3^{k+1}$$
$$1+2(k+1) < 3^{k+1}$$

$P(k+1)$ es verdadera y $P(n)$ se cumple para todo natural mayor o igual a dos.

Ejercicio 24. Demostrar que $2^n < n!$, si n es un número natural y $n \geq 4$.

Demostración

$P(n): \quad 2^n < n! \; ; \quad \forall\, n \in N, \qquad n \geq 4$

i) ¿Es $P(4)$ verdadera ?

$P(4): \qquad 2^4 < 4!$

$16 < 24$

$P(4)$ es verdadera.

ii) Hipótesis de inducción

$P(k): \; 2^k < k!$ para algún $k \in N$, $k \geq 4$

Tesis

$P(k+1): \quad 2^{k+1} < (k+1)!$

Por hipótesis

$2^k < k!$

Multiplicando por 2 en ambos miembros de la desigualdad anterior

$$(2^k)(2) < (k!)(2)$$
$$2^{k+1} < 2k!$$

ahora bien, si demostramos que $2k! < (k+1)!$ entonces por transitividad la tesis queda demostrada, es decir, $2^{k+1} < (k+1)!$

$$2k! < (k+1)!$$
$$2k! < (k+1)\,k!$$
$$2 < k+1$$

Por tanto, ya que la desigualdad $2 < k+1$ es verdadera para todo natural $k \geq 4$, entonces es cierto que $2k! < (k+1)!$ y $2^{k+1} < (k+1)!$.

Concluimos que la proposición $P(n)$ es válida para todo natural $n \geq 4$.

Ejercicio 25. Demostrar con el método de inducción matemática, la validez de la siguiente proposición

$$P(n): \; \operatorname{sen}(\theta + n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen}\theta \qquad \forall\, n \in N$$

Demostración

i) $P(1):\ \text{sen}(\theta+(1)\pi)=(-1)^n\ \text{sen}\,\theta$

$$\text{sen}(\theta+\pi)=-1\ \text{sen}\,\theta$$

$$-\text{sen}\,\theta=-\text{sen}\,\theta$$

$P(1)$: es verdadera

ii) Hipótesis de inducción

$P(k):\ \text{sen}(\theta+k\pi)=(-1)^k\ \text{sen}\,\theta$ para algún $k\in N$

Tesis

$P(k+1):\text{sen}(\theta+(k+1)\pi)=(-1)^{k+1}\text{sen}\,\theta$

Iniciamos con la suposición

$\text{sen}(\theta+k\pi)=(-1)^k\,\text{sen}\,\theta$
Multiplicamos por -1 en ambos miembros

$$(-1)\,\text{sen}(\theta+k\pi)=(-1)(-1)^k\,\text{sen}\,\theta$$
$$-\text{sen}(\theta+k\pi)=(-1)^{k+1}\,\text{sen}\,\theta$$
$$\text{sen}(\theta+k\pi+\pi)=(-1)^{k+1}\,\text{sen}\,\theta$$
$$\text{sen}(\theta+(k+1)\pi)=(-1)^{k+1}\,\text{sen}\,\theta$$

La tesis queda demostrada y la proposición $P(n)$ es válida para todo n en los naturales.

Ejercicio 26. Demostrar con el método de inducción matemática, la validez de la proposición:

$$P(n):\quad (1+x)^n>1+nx+nx^2,\quad (x>0),\quad \forall\ n\geq 3,\quad n\in N$$

Demostración

i) $P(3):$

$$(1+x)^3 > 1+3x+3x^2$$
$$1+3x+3x^2+x^3 > 1+3x+3x^2$$
$$x^3 > 0$$

$x^3 > 0$ pues que $x > 0$. $P(3)$ es verdadera.

ii) Hipótesis de inducción

$P(k): \ (1+x)^k > 1+kx+kx^2$ para algún $k \geq 3$, $\quad k \in N$

Tesis

$P(k+1): \ (1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x+(k+1)x^2$

Por hipótesis de inducción

$(1+x)^k > 1+kx+kx^2$

Multiplicando en ambos miembros por $(1+x)$

$(1+x)^{k+1}(1+x) > (1+kx+kx^2)(1+x)$

La relación de orden "mayor que" no se altero ya que $1+x>0$.

$(1+x)^{k+1} > 1+kx+kx^2+x+kx^2+kx^3$
$(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x+(2k+kx)x^2$

Si demostramos que $1+(k+1)x+(2k+kx)x^2 > 1+(k+1)x+(k+1)x^2$, entonces por transitividad $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x+(k+1)x^2$. Observe que

$$1+(k+1)x+(2k+kx)x^2 > 1+(k+1)x+(k+1)x^2$$
$$2k+kx > k+1$$
$$k(1+x) > 1$$

Pero esto es cierto puesto que $1+x>1$ y $k \geq 3$. De esta manera $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x+(2x+kx)x^2 > 1+(k+1)x+(k+1)x^2$. $P(k+1)$ es verdadera y $P(n)$ es válida para todo $n \geq 3$, $n \in N$.

Ejercicio 27. Demostrar con el método de inducción matemática la validez de la proposición:

$$P(n): \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2-\frac{1}{n}, \qquad \forall\, n \geq 2,\ n \in N$$

Demostración

i) $$P(2): \frac{1}{2^2} < 2-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} < \frac{3}{2}$$

$P(2)$ es verdadera.

ii) Hipótesis de inducción

$$P(k): \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{k^2} < 2-\frac{1}{k} \text{ para algún } k \geq 2,\quad k \in N$$

Tesis

$$P(k+1): \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < 2-\frac{1}{k+1}$$

Por hipótesis de inducción

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

Adicionando en ambos miembros $\frac{1}{(k+1)^2}$, obtenemos :

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

Ahora para verificar la validez de $P(k+1)$, habrá de probar que

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

Desarrollando esta desigualdad

$$\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1\cdot)^2}<0$$

$$\frac{k(k+1)-(k+1)^2+k}{k(k+1)^2}<0$$

$k(k+1)-(k+1)^2+k<0$ $\quad$ ($k(k+1)^2$ *es positivo*)

$(k+1)(k-k-1)+k<0$

$-k-1+k<0$

$-1<0$ $\quad$ (*verdadero*)

Por tanto

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

y por transitividad

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

Concluimos que la proposición $P(n)$ es válida para todo $n \geq 2, \quad n \in N$.

Ejercicio 28. Utilizar el método de inducción matemática, para demostrar la validez de la proposición:

$$P(n): \ \left(1+a^{2^1}\right)\left(1+a^{2^2}\right)\ldots\left(1+a^{2^n}\right) = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2},$$

$$(a \neq -1, 1); \qquad \forall\, n \in N$$

Demostración

i) $\quad P(1): \quad 1+a^{2^1} = \dfrac{1-a^{2^2}}{1^2-a^2}$

$$1+a^2 = \frac{1-a^4}{1-a^2}$$

$$1+a^2 = \frac{\left(1+a^2\right)\left(1-a^2\right)}{1-a^2}$$

$$1+a^2 = 1+a^2$$

$P(1)$ es verdadera.

ii) Hipótesis de inducción

$$P(k): \ \left(1+a^{2^1}\right)\left(1+a^{2^2}\right)\ldots\left(1+a^{2^k}\right) = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a^2}$$

para algún $k \in N$.

Tesis

$$P(k): \ \left(1+a^{2^1}\right)\left(1+a^{2^2}\right)\ldots\left(1+a^{2^k}\right)\left(1+a^{2^{k+1}}\right) = \frac{1-a^{2^{k+2}}}{1-a^2}$$

De la hipótesis de inducción

$$\left(1+a^{2^1}\right)\left(1+a^{2^2}\right)\ldots\left(1+a^{2^k}\right) = \frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a^2}$$

Multiplicamos en ambos miembros por el $(k+1)$ - ésimo término

$$\left(1+a^{2^1}\right)\left(1+a^{2^2}\right)\ldots\left(1+a^{2^k}\right)\left(1+a^{2^{k+1}}\right)=\frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a^2}\left(1+a^{2^{k+1}}\right)$$

Desarrollamos el miembro derecho de la ecuación anterior

$$\begin{aligned}\frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a^2}\left(1+a^{2^{k+1}}\right) &= \frac{\left(1-a^{2^{k+1}}\right)\left(1+a^{2^{k+1}}\right)}{1-a^2}\\ &= \frac{1^2-\left(a^{2^{k+1}}\right)^2}{1-a^2}\\ &= \frac{1-a^{2\cdot 2^{k+1}}}{1-a^2}\\ &= \frac{1-a^{2^{k+2}}}{1-a^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left(1+a^{2^1}\right)\left(1+a^{2^2}\right)\ldots\left(1+a^{2^k}\right)\left(1+a^{2^{k+1}}\right)=\frac{1-a^{2^{k+1}}}{1-a^2}$$

En consecuencia la proposición $P(n)$ es válida para todo $n \in N$.

Ejercicio 29. Demostrar con el método de inducción matemática la validez de la proposición:

$$P(n):\quad \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2};\qquad \forall\ n\in N$$

Demostración

i) $P(1)$: $\quad \cos\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\dfrac{1}{2}$

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\theta\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\theta\right)+\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)},\ \left(senA sen B = 2sen\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\cos(\theta)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}$$

$$=\cos\theta$$

$P(1)$ es verdadera.

ii) Hipótesis de inducción

$$P(k):\ \cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos k\theta=\frac{\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}\qquad \text{para algún } k\in N.$$

Tesis

$$P(k+1):\ \cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos k\theta+\cos(k+1)\theta=\frac{\operatorname{sen}\left((k+1)+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}$$

Por hipótesis de inducción

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos k\theta=\frac{\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}$$

Adicionando $\cos(k+1)\theta$ en ambos miembros de la hipótesis de inducción

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos k\theta+\cos(k+1)\theta=\frac{\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}+\cos(k+1)\theta$$

Desarrollando el miembro derecho de esta ecuación

$$\frac{\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}+\cos(k+1)\theta=\frac{\operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta+2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\cos(k+1)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\left(k+1-\frac{1}{2}\right)\theta+2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\cos(k+1)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}(k+1)\theta\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\cos(k+1)\theta+2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\cos(k+1)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}(k+1)\theta\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)\cos(k+1)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\left((k+1)+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}$$

Así,

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos k\theta+\cos(k+1)\theta=\frac{\operatorname{sen}\left((k+1)+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta\right)}-\frac{1}{2}$$

Por tanto $P(n)$ es válida para todo $n \in N$.

Ejercicio 30. Aplicar inducción matemática para demostrar la validez de la proposición.

$$P(n): \quad \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}; \qquad \forall n \geq 2, \qquad n \in N$$

Demostración

i) $$P(2): \quad \frac{4^2}{2+1} < \frac{(2(2))!}{(2!)^2}$$

$$\frac{16}{3} < 6$$

$P(2)$ es verdadera.

ii) Hipótesis de inducción

$$P(k): \quad \frac{4^k}{k+2} < \frac{(2k)!}{(k!)^2} \text{ para algún } k \geq 2, \quad k \in N$$

Tesis

$$P(k+1): \quad \frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{\big(2(k+1)\big)!}{\big((k+1)!\big)^2}$$

Por hipótesis de inducción

$$\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

Observe que si multiplicamos el término $\frac{4^k}{k+1}$ por $\frac{4(k+1)}{k+2}$, obtenemos el miembro izquierdo de la desigualdad que aparece en la tesis, es decir

$$\frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} = \frac{4^{k+1}}{k+2}$$

También, si multiplicamos el término $\frac{4^k}{k+1}$ por $\frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}$, obtenemos el miembro derecho de la desigualdad que corresponde a $P(k+1)$, es decir,

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2} = \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)}{\left((k+1)!\right)^2} = \frac{(2k+2)!}{\left((k+1)!\right)^2} = \frac{\left(2(k+1)\right)!}{\left((k+1)!\right)^2}$$

Al desarrollar la desigualdad

$$\frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k+1)(2k+1)}{(k+1)^2}$$

verificamos que ésta es verdadera.

En efecto

$$\frac{4(k+1)^3}{k+2} < (2k+2)(2k+1)(k+2), \quad \textit{como } (k+2) \textit{ y } (k+1)^2 \textit{ son positivos}$$

$$4(k^3+3k^2+3k+1) < (4k^2+6k^2+2)(k+1)$$

$$4k^3+12k^2+12k+4) < 4k^3+14k^2+14k+4)$$

$$0 < 2k^2+2k$$

$$0 < 2k(k+1)$$

$$0 < k+1$$

lo cual es verdadera para todo $k \geq 2$, $k \in N$.

Si ahora, multiplicamos el miembro izquierdo de la desigualdad $\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ por $\frac{4(k+1)}{(k+2)}$ y el miembro derecho por $\frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}$

obtenemos

$$\frac{4^k}{k+1} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k)}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}$$

$$\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{\left(2(k+1)\right)!}{k+1}$$

Por tanto $P(k+1)$ es verdadera y de *(i)* y *(ii)* concluimos que la proposición $P(n)$ es válida para todo $n \geq 2$, $n \in N$.

Ejercicios Propuestos

Mediante el método de inducción matemática demostrar la validez de las siguientes proposiciones.

1) $$\frac{4}{1 \cdot 4} + \frac{4}{4 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{4}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{4n}{3n+1} \; ; \qquad \forall\, n \in N$$

2) $$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \; ; \qquad \forall\, n \in N$$

3) $$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{4n} \; ; \qquad \forall\, n \in N$$

4) $$\left(\frac{1}{2}\right)(2) + \left(\frac{2}{2}\right)(3) + \left(\frac{3}{2}\right)(4) + \ldots + \left(\frac{n}{2}\right)(n+1) = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)(n+2) \; ; \quad \forall\, n \in N$$

5) $$\frac{5}{1 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 5} + \frac{5}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{5}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{5n}{2n+1} \; ; \qquad \forall\, n \in N$$

6) $$\frac{a}{2} + \frac{a(1+b)}{2} + \frac{a(1+b)^2}{2} + \ldots + \frac{a(1+b)^{n-1}}{2} = \frac{a(1+b)^n - a}{2b} \; ; \quad a, b \in R^+ \; ; \quad \forall n \in N$$

7) $$\sum_{r=1}^{n} (3r-2)(6r+2) = 2n(3n^2 + 3n - 2) \; ; \qquad \forall\, n \in N$$

8) $1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1} = \dfrac{4^n - 1}{3}$; $\forall\ n \in N$

9) $6 + 24 + 42 + \ldots + (18n - 12) = 3n(3n - 1)$; $\forall\ n \in N$

10) $3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = \dfrac{3}{2}(3^n - 1)$; $\forall\ n \in N$

11) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (n - 1)2^{n+1} + 2$; $\forall\ n \in N$

12) $n < 2^n$; $\forall\ n \in N$

13) $\dfrac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \in Z$, $\forall\ n \in N$

14) $(ab)^n = a^n b^n$; $\forall\ n \in N$

15) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = n(2n - 1)$; $\forall\ n \in N$

16) *si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *entonces* $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\forall\ n \in N$

17) " $3^{2n} + 7$ *es divisible entre* 8" , $\forall\ n \in N$

18) $3^n > 2^n + 20$; $\forall\ n \geq 4$, $n \in N$

19) $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$, $\forall\ n \geq 2$, $n \in N$

20) $2 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \ldots + n \cdot 2^{n-2} = (n - 1)2^{n-1}$, $\forall\ n \geq 2$, $n \in N$

Esta obra se terminó de imprimir
en mayo de 2010 en el
Departamento de Publicaciones
Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 1,000 ejemplares impresos en offset
con papel bond de 75 gramos, de 28 × 21.5 cm.

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería