EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES.

Los números naturales.

Definición (Postulados de Peano).

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es tal que:

i) $1 \in \mathbb{N}$
ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único $n \in \mathbb{N}$, llamado el siguiente de n
iii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ *se* tiene que $n^* \neq 1$
iv) Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m^* = n^*$, entonces $m = n$
v) Todo subconjunto S de N que tenga las propiedades:

a) $1 \in S$
b) $k \in S$ implica que $k^* \in S$ es el mismo conjunto $\mathbb{N}$

Definición: Adición.

i) $n + 1 = n^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$
ii) $n + m^* = (n + m)^*$, siempre que $n + m$ esté definido

Teorema

Para todo $n, n, p \in \mathbb{N}$

i) $m + n \in \mathbb{N}$	cerradura
ii) $m + (n + p) = (m + n) + p$	asociatividad
iii) $m + n = n + m$	conmutatividad
iv) si $m + p = n + p$, entonces $m=n$	cancelacion

Definición: Multiplicación

i) $n \cdot 1 = n$
ii) $n \cdot m^* = (n \cdot m) + n$

Teorema

Para todo $n, n, p \in \mathbb{N}$

i) $m \cdot n \in \mathbb{N}$
ii) $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$
iii) $m \cdot n = n \cdot m$
iv) Si $m \cdot p = n \cdot p$, entonces $m = n$

Teorema

Para todo $n, n, p \in \mathbb{N}$

m $\cdot$ (n + p) = (m $\cdot$ n) + (m $\cdot$ p)

Definición.

Dados dos números naturales m y n, decimos que n es menor que m, lo que representamos mediante $n < m$, si

$$\exists \text{ x } \in \mathbb{N} \text{ tal que n + x = m}$$

Teorema

Si $m \ y \ n$ son números naturales cualesquiera, entonces se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones:

i) n < m
ii) n = m
iii) n < m

Teorema

Para todo $n, n, p \in \mathbb{N}$

i) m < n $\Rightarrow$ m + p < n + p
ii) m < n $\Rightarrow$ mp < np
iii) m < n y n < p $\Rightarrow$ m < p

Definición

Dados los números naturales m y n, decimos que m es mayor que n, lo que representamos mediante m>n, si n<m.

Método de inducción matemática

1. Determinar si la preposición se satisface para el **menor valor** indicado de n.
2. Suponer que la preposición es válida para un valor *n=k* (hipótesis de inducción) y determinar si la proposición se cumple para el siguiente valor de *k*, esto es *k+1*, (tesis de inducción).

Ejemplo. Demostrar por inducción matemática la proposición:

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^n = \frac{(-1)^n - 1}{2}; \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

Solución:

$i)$ $\text{n} = 1$

$$(-1)^1 = \frac{(-1)^1 - 1}{2} - 1 = \frac{-1-1}{2} = -1$$

$ii)$ Hipótesis de inducción $n = k$

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + ... + (-1)^k = \frac{(-1)^k - 1}{2}$$

$iii)$ Tesis $n = k + 1$

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + ... + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} - 1}{2}$$

$iv)$ Demostración

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + ...(-1)^k = \frac{(-1)^k - 1}{2}$$

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + ...(-1)^k + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k - 1}{2} + (-1)^{k+1}$$

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + ...(-1)^k + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k - 1}{2} + \frac{(-1)^{k+1}}{1}$$

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + ...(-1)^k + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k - 1 + 2(-1)^{k+1}}{2}$$

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + ...(-1)^k + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k + 2(-1)^k(-1) - 1}{2}$$

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + ...(-1)^k + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^k(1-2) - 1}{2}$$

$$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + ...(-1)^k + (-1)^{k+1} = \frac{(-1)^{k+1} - 1}{2}$$

Ejemplo: Demostrar por inducción matemática la proposición:

$$1^3 + 2^2 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}; \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

Solución:

$i)\ n=1$

$1^3=\frac{(1)^2(1+1)^2}{4},\ \ 1^3=\frac{(1)(2)^2}{4},\ \ 1^3=\frac{4}{4},\ \ 1=1$

$ii)$ Hipótesis de inducción $n=k$

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

$iii)$ Tesis $n=k+1$

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$iv)$ Demostración

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{4^2(k+1)^3+k^2(k+1)^2}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2\left(4(k+1)+k^2\right)}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2\left(4k+4+k^2\right)}{4}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Demostrar por inducción matemática la proposición

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\quad \forall n\in\mathbb{R}$$

Solución

$i)\ n=1$

$1^2=\frac{(1)(2)(3)}{6},\ \ 1^2=\frac{6}{6},\ \ 1=1$

$ii)$ Hipótesis de inducción $n=k$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$iii)$ Tesis $n=k+1$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1)(2k+3)}{6}$$

$iv)$ Demostración

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{6(k+1)^2+k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)\big(6(k+1)+k(2k+1)\big)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(6k+6+2k^2+k)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Los números enteros.

Definición

Sea la ecuación

$$n + x = m; \qquad con \qquad m,\ n \in \mathbb{N}$$

A su solución; es decir, al número *x* que sumado a *n* nos da como resultado *m*, lo llamaremos la diferencia *m-n*

Definición. Conjunto de los números enteros.

$$\mathbb{Z}=\{x \mid x=m-n;\ m,\ n\in\mathbb{N}\}$$

Definición.

Sean *a=m-n, b=p-q,* dos números enteros con, con $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$a = b \quad si \quad m + q = n + p$$

Definición: Adición

Sean *a=m-n, b=p-q* dos números enteros, con $m, n, p, q \in \mathbb{N}$.

El número *a+b* se define como:

$$a + b = (m + p) - (n + q)$$

Teorema

Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$i)$ a + b $\in \mathbb{Z}$	*cerradura*
$ii)$ $a + (b + c) = (a + b) + c$	*asociatividad*
$iii)$ $a + b = b + a$	*conmutatividad*
$iv)$ si a+c=b+c , entonces $a = b$	*cancelación*
$v)$ $a + 0 = a$	*elemento idéntico*
$vi)$ $\exists a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$	*elemento inverso*

Definición

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, el número *a-b* se define como: *a-b=a+(-b)*

Definición: Multiplicación

Sean *a=m-n, b=p-q* dos números enteros, con $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. El número $a \cdot b$ se define como:

$$a \cdot b = (m \cdot p + n \cdot q) - (n \cdot p + m \cdot q)$$

Teorema

Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$i) a \cdot b \in \mathbb{Z}$$
$$ii) a \cdot \left(b \cdot c\right) = \left(a \cdot b\right) \cdot c$$
$$iii) a \cdot b = b \cdot a$$
$$iv) si \ a \cdot c = b \cdot c \ y \, c \neq 0, \ entonces \ a = b$$
$$v) a \cdot 1 = a$$

Teorema

Para todo $a,b,c, \in \mathbb{Z}$

$a(b+c)=ab+ac$

Teorema

Para todo a, b, c $\in \mathbb{Z}$:

$i)\ a \cdot 0 = 0$

$ii)\ (-a)(b) = -(ab)$ primera regla de los signos

$iii)\ (-a)(-b) = ab$ segunda regla de los signos

Definición

Sean a, b $\in \mathbb{Z}$:

$i)\ a < b$ si $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que a + n = b

ii) $a > b$ si $b < a$

Teorema

Para todo $a,b,c \in \mathbb{Z}$

$i)\ a < b \Rightarrow a + c < b + c$

$ii)\ a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

$a < b$ y $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

$iii)\ a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$

Definición

Sea $a \in \mathbb{Z}$

a es positivo si a > 0

a es negativo si a < 0

Los números racionales

Definición

Sea la ecuación:

$$bx = a; \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

A su solución; es decir, al número *x* que multiplicado por *b* nos da como resultado *a,* le llamaremos el cociente de *a* entre *b* y lo representamos:

$$\frac{a}{b}$$

Definición de números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \middle| x = \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Definición de igualdad de números racionales.

$$Sean\, \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}\ con\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}\ y\ b, d \neq 0$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ si\ ad = bc$$

Definición de adición de números racionales

$$Sean\, \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}\ con\ a, b, c, d \in \mathbb{Z}\ y\ b, d \neq 0$$
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Teorema

Para todo $a, b, c \in \mathbb{Q}$*:*

$i)$ a + b $\in \mathbb{Q}$	*cerradura*
$ii)\ a + (b + c) = (a + b) + c$	*asociatividad*
$iii)\ a + b = b + a$	*conmutatividad*
$iv)$ si a + c = b + c , entonces $a = b$	*cancelación*
$v)\ a + 0 = a$	*elemento idéntico*
$vi)\ \exists a \in \mathbb{Q}$ tal que $a + (-a) = 0$	*elemento inverso*

Definición

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, el número $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ se define como:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}$$

Teorema:

Para todo $a,b,c \in \mathbb{Q}$

$i)\ ab \in \mathbb{Q}$	*cerradura*
$ii)\ a(bc)=(ab)c$	*asociatividad*
$iii)\ ab=ba$	*conmutatividad*
$iv)$ si $ac=bc$ y $c\neq 0$, entonces $a=b$	*cancelación*
$v)\ a\cdot 1=a$	*elemento idéntico*
$vi)$ Si $a\neq 0\ \exists\, a^{-1}\in\mathbb{Q}$ tal que $a\,a^{-1}=1$	*elemento inverso*

Definición

Sean $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, dos números racionales, y $\frac{c}{d}\neq 0$

El número $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ se define como:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Teorema

Para todo $x,y,z\in\mathbb{Q}$

$$x\left(y+z\right)=xy+xz$$

Teorema

Para todo $x,y,z\in\mathbb{Q}$

$$x(y+z)=xy+xz$$

Teorema

Para todo $x,y,z\in\mathbb{Q}$

$$i)\ x\cdot 0=0$$
$$ii)\ (-x)(y)=-(xy)$$
$$iii)\ (-x)(-y)=xy$$

Definición

Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, donde $b, d \ \in \mathbb{Z}^{+}$

$$i) \ \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \qquad \text{si} \qquad ad < bc$$

$$ii) \ \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \qquad \text{si} \qquad \frac{c}{d} < \frac{a}{b}$$

Teorema

Para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$

$$i) \quad x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

$$ii) \ x < y \ \text{ y } \ z > 0 \Rightarrow xz < yz$$

$$x < y \ \text{ y } \ z < 0 \Rightarrow xz > yz$$

$$iii) \ x < y \ \text{ y } \ y < z \Rightarrow x < z$$

Teorema

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Q},\ con\, x < y,\ \exists z \in \mathbb{Q}\ tal\ que\ \ x < z < y$$

Demostración

Hipótesis

$x < y$

$x + x < x + y$

$2x < x + y$

$x < \frac{x+y}{2} \ldots .1$

Hipótesis

$x < y$

$x + y < y + y$

$x + y < 2y$

$\frac{x+y}{2} < y \ldots 2$

De 1 y 2

$$x < \frac{x+y}{2} < y \qquad Si\ \ z = \frac{x+y}{2}\ \text{ entonces}$$

$$x < z < y$$

Teorema

Todo número racional tiene una expresión decimal periódica.

Ejemplo: Expresar al número $\mathbf{2.35\overline{831}}$

Solución:

$x = 2.35\overline{831}$

$10^2 x = 10^2\left(2.35\overline{831}\right)$

$100x = 235.\overline{831}......1$

$10^3\left(100x\right) = 10^3\left(235.\overline{831}\right)$

$100000x$

$= 235831.\overline{831}.........2$

Se hace $\left(2\right)-\left(1\right)$

$100000x - 100x = 235831.\overline{831} - 235.\overline{831}$

$99900x = 235596$

$x = \dfrac{235596}{99900} = 2.35\overline{831}$

$x = \dfrac{58899}{24975} = \dfrac{19633}{8325}$

Ejemplo: Expresar al número $\mathbf{14.3\overline{45}}$

Solución:

$x = 2.35\overline{831}$

$10^2 x = 10^2\left(2.35\overline{831}\right)$

$100x = 235.\overline{831}......1$

$10^3\left(100x\right) = 10^3\left(235.\overline{831}\right)$

$100000x$

$= 235831.\overline{831}.........2$

Se hace $\left(2\right)-\left(1\right)$

$100000x - 10x = 14345.\overline{45} - 143.\overline{45}$

$990x = 14202$

$x = \dfrac{14202}{990}$

Teorema

Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$

$i)$ $x + y \in \mathbb{R}$
$xy \in \mathbb{R}$ — *cerradura*

$ii)$ $x + (y+z) = (z+y) + z$
$x(yz) = (xy)z$ — *asociatividad*

$iii)$ $x + y = y + x$
$xy = yx$ — *conmutatividad*

$iv)$ $x + 0 = x$
$\mathrm{x} \cdot 1 = x$ — *elemento idéntico*

$v)$ $\exists -x \in \mathbb{R}$ tal que $x + (-x) = 0$
$\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $xx^{-1} = 1$, si $x \neq 0$ — *elemento inverso*

$vi)$ $x(y+z) = xy + xz$ — *distributividad*

Teorema

Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$

$i)\quad \mathrm{x} \cdot 0 = 0$
$ii)\ (-x)(y) = -(xy)$
$iii)\ (-x)(-y) = xy$

Definición

Sean *x,* y *y* dos números reales.

$i)$ El número $x - y$ se define como: $x - y = x + (-y)$
$ii)$ Si $y \neq 0$ el número $x \div y$ se define como: $x \div y = xy^{-1}$

Teorema

Si x y $y \in \mathbb{R}$, entonces se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones:

$i)\quad x < y$
$ii)$ x=y
$iii)\ y < x$

Teorema

$$\begin{array}{l} \textit{Para todo } x, y, z \in \mathbb{R} \\ i)\quad x < y \Rightarrow x + z < y + z \\ ii)\ x < y, z > 0 \Rightarrow xz < yz \\ \quad\ \ x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz \\ iii)\ x < y, y < z \Rightarrow x < z \end{array}$$

Teorema (completitud de $\mathbb{R}$)

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que está acotado superiormente tiene un supremo que pertenece a $\mathbb{R}$

Definición

Sea *x* un número real. El valor absoluto de x, que representamos con $|x|$, se define como:

$$x = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Teorema

Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$i) \quad |x| \geq 0 \text{ Además } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$ii) \quad |xy| = |x| \cdot |y|$$
$$iii) \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

Teorema

$$\text{Sea } \alpha \text{ con } \alpha \geq 0; \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ se tiene que}$$
$$|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$$

Teorema

$$\text{Sea } \alpha \text{ con } \alpha \geq 0; \ \forall x \in \mathbb{R} \text{ se tiene que}$$
$$|x| \leq \alpha \Leftrightarrow \ \text{ó } x \geq \alpha$$

Ejemplo: Resolver la desigualdad $|\mathbf{x}| \geq \mathbf{7}$

Solución

$$x \leq -7 \ \ ó \ \ x \geq 7$$
$$x \in (-\infty, 7] \cup [7, \infty)$$

Ejemplo: Resolver la desigualdad $|\mathbf{3x - 1}| \leq \mathbf{10}$

Solución

$$-10 \leq 3x - 1 \leq 10$$
$$-9 \leq 3x \leq 11$$
$$-3 \leq x \leq \frac{11}{3}$$
$$x \in \left[-3, \frac{11}{3}\right]$$

Ejemplo: resolver la desigualdad $|\mathbf{3 - 8x}| \leq \mathbf{5}$

$$5 \leq 3 - 8x \leq 5$$
$$-8 \leq -8x \leq 2$$
$$1 \geq x \geq -\frac{2}{8}$$
$$x \in \left[-\frac{1}{4}, 1\right]$$

Ejemplo: Resolver la desigualdad $\left|\frac{3}{4}-\frac{x}{5}\right|<11$

Solución

$$-11<\frac{3}{4}-\frac{x}{5}<11$$
$$-11-\frac{3}{4}<-\frac{x}{5}<11-\frac{3}{4}$$
$$-\frac{47}{4}<-\frac{x}{5}<\frac{41}{4}$$
$$\frac{235}{4}>x>-\frac{205}{4}$$
$$x\in\left(-\frac{205}{4},\frac{235}{4}\right)$$

Ejemplo: Resolver la desigualdad $|4x-12|\geq 6$

Solución

$$4x-12\leq -6$$
$$4x\leq 6$$
$$x\leq\frac{6}{4}$$
$$x\leq\frac{3}{2}$$

$$8-9x>12$$
$$-12>9x-8$$
$$-4>9x$$
$$x<-\frac{4}{9}$$

$$x\in\left(-\infty,-\frac{4}{9}\right]\cup\left[\frac{20}{9},\infty\right)$$