Transformaciones Lineales

Definición: Transformación

Si *V* y *W* son espacios vectoriales una función *T: V→W* recibe el nombre de transformación. Los espacios *V* y *W* se llaman, respectivamente, dominio y codominio de la transformación.

Definición: Recorrido y núcleo

Sea *T: V→W* una transformación:

i) Se llama recorrido de *T* al conjunto

$$T(V) = \{ T(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V \}$$

ii) Se llama núcleo de *T* al conjunto

$$N(T) = \{ \bar{v} \mid T(\bar{v}) = \bar{0}_w \}$$

Definición: Transformación lineal

Sea V y W dos espacios vectoriales sobre un campo K. Una transformación *T: V→W* es línea si $\forall \ \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V \quad y \quad \forall \alpha \in K$:

i) $T(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = T(\bar{v}_1) + T(\bar{v}_2)$
ii) $T(\alpha \bar{v}_1) = \alpha T(\bar{v}_1)$

Teorema

Si *T: V→W* es una transformación lineal, entonces:

$$T(\bar{0}_v) = \bar{0}_w$$

Teorema

Sea *T: V→W* una transformación lineal. Si $B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \}$ es una base de V, entonces el conjunto $G = \{ T(\bar{v}_1), T(\bar{v}_2), \dots, T(\bar{v}_n) \}$ es un generador de *T(V).*

Teorema

Si *V* es un espacio de dimensión finita y *T: V→W* es una transformación lineal, entonces:

$$dimV = dimT(V) + dimN(T)$$

Teorema

Sean *V* y *W* dos espacios vectoriales con $dimV = n$ y $dimW = m$; y sean $A = \{ \bar{v}_1 , \bar{v}_2 , \dots , \bar{v}_n \}$ y $B = \{ \bar{w}_1 , \bar{w}_2 , \dots , \bar{w}_m \}$ bases de *V* y *W*, respectivamente.

Si *T: V→W* es una transformación lineal, existe una y solo una matriz $M_B^A(T)$, de *mxn*, tal que:

$$M_B^A(T)(\bar{v})_A = [T(\bar{v})]_B, \ \forall \ \bar{v} \ \in \ V$$

Las columnas de dicha matriz son los vectores:

$$[T(\bar{v}_1)]_B, [T(\bar{v}_2)]_B, \dots , [T(\bar{v}_n)]_B$$

Teorema

Si *V* es un espacio vectorial de dimensión *n*, entonces la matriz asociada a la transformación identidad *I: V→W*, referida a cualquier base de *V*, es la matriz identidad I_n.

Definición: Suma y producto escalar en transformaciones

Sean *S* y *T* dos transformaciones de *V* en *W*, y sea *K* el campo sobre el cual está definido el espacio *W*:

i) La suma de *S* y *T* es una transformación de *V* en *W*, denotada con *S*+*T* y definida por:
$$(S + T)(\bar{v}) = S(\bar{v}) + T(\bar{v}) ; \quad \forall \bar{v} \in V$$
ii) El producto de un escalar $\alpha \in K$ por la transformación *S* es una transformación de *V* en *W*, denotada con αS y definida por
$$(\alpha S)(\bar{v}) = \alpha \square S(\bar{v}) ; \quad \forall \bar{v} \in V$$

Teorema

Sean *V* y *W* dos espacios vectoriales sobre un campo *K*, con $dimV = m$ y $dimW = n$, sea $L(V, W)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de *V* en *W*. Si *A* y *B* son bases de *V* y *W* respectivamente; entonces $\forall S, T \in L(V, W)$ y $\forall \alpha \in K$:

i) $M_B^A(S + T) = M_B^A(S) + M_B^A(T)$
ii) $M_B^A(\alpha S) = \alpha M_B^A(S)$

Definición

Si *T: U→V y S: V→W* son dos transformaciones, *S ∘ T* es una transformación de *U* en *W* definida por:

$$(S \circ T)(\bar{u}) = S[T(\bar{u})]; \ \forall \bar{u} \in U$$

Teorema

Si *T: U→V* y *S: V→W* son dos transformaciones lineales y *A, B, C* son bases de *U, V, W* respectivamente, entonces:

$$M_C^A(S \circ T) = M_C^B(S)M_B^A(T)$$

Teorema

Si *T: V→W* una transformación lineal, *V* un espacio de dimensión finita y *A, B* bases de *V* y *W* respectivamente:

i) T^{-1} existe si y solo si $M_B^A(T)$ es no singular
ii) Si T^{-1} existe, entonces $M_B^A(T^{-1}) = [\, M_B^A(T)\,]^{-1}$

Definición: Valores y vectores característicos

Sea *V* un espacio vectorial sobre *K* y sea *T: V→V* un operador lineal. Si existe un vector $\bar{v} \in V.\ \bar{v} \neq \bar{0}$, tal que:

$$T(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$$

Para algún escalar $\lambda \in K$; entonces se dice que λ es un valor característico de *T* y que $\bar{v}$ es un vector característico de *T* correspondiente a λ.

Definición: Subespacio

Si *T: V→V* es un operador lineal y λ es un valor característico de *T*, entonces el conjunto $E(\lambda) = \{\, \bar{v} \mid \bar{v} \in V \ y \ T(\bar{v}) = \lambda\bar{v} \,\}$ es un subespacio de *V*.

Definición: Espacio característico

Si *T: V→V* es un operador lineal y λ es un valor característico de *T*, entonces el conjunto $E(\lambda) = \{\, \bar{v} \mid \bar{v} \in V \ y \ T(\bar{v}) = \lambda\bar{v} \,\}$ se llama espacio característico de *T* correspondiente al valor λ.

Definición: Matrices similares

Dos matrices *A* y *B* de *nxn* son similares si existe una matriz no singular *C* tal que

$$B = C^{-1}AC$$

Teorema

Dos matrices representan al mismo operador lineal si y sólo si son similares.

Teorema

Si *A* y *B* son matrices similares entonces $detA = detB$

Teorema

Dos matrices similares tienen el mismo polinomio característico y, por tanto, los mismos valores característicos.

Teorema

Todas las representaciones matriciales de un operador lineal tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores característicos.

Teorema

Una matriz *A* de *nxn* es similar a una matriz diagonal *D* si y sólo si existe un conjunto linealmente independiente formado por *n* vectores característicos de *A*. En tal caso, existe una matriz no singular *P* tal que $D=P^{-1}AP$, donde *D* es una matriz diagonal cuyos elementos d_{ii} son los valores característicos de *A*, y *P* tiene como columnas a *n* vectores característicos de *A* correspondientes a dichos valores.