# Operadores en Espacios con Producto Interno

**Definición: Operador adjunto**

Sea *V* un espacio con producto interno y sea $T: V \to V$ un operador lineal. Un operador $T^*: V \to V$ se dice que es adjunto de *T* si:

$$(\, T(\bar{u}) | \bar{v}\, ) = \left(\, \bar{u} \middle| T^*(\bar{v}) \right), \quad \forall \; \bar{u}, \bar{v} \; \in \; V$$

**Teorema**

Si *V* es un espacio vectorial de dimensión finita y con producto interno, entonces para cada operador lineal $T: V \to V$ existe un único adjunto $T^*$, que también es lineal.

**Teorema**

Sea *V* un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea *B* una base ortonormal de *V*. Si $T: V \to V$ es un operador lineal, entonces:

$$M_B^B(T^*) = [M_B^B(T)]^*$$

**Teorema**

Sea *V* un espacio vectorial sobre *K*, con producto interno. Si *S* y *T* son operadores lineales en *V* y $\alpha$ es un escalar de *K*, entonces:

i) $(T^*)^* = T$
ii) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
iii) $(S + T)^* = S^* + T^*$
iv) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$

**Definición: Operador normal**

Sea *V* un espacio con producto interno y sea $T: V \to V$ un operador lineal. Se dice que *T* es normal si $T \circ T^* = T^* \circ T$.

**Teorema**

Sea *V* un espacio con producto interno y sea $T: V \to V$ un operador normal:

i) $\| T(\bar{v}) \| = \| T^*(\bar{v}) \|, \forall \; \bar{v} \; \in \; V$
ii) $Si \;\; T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ entonces $T^*(\bar{v}) = \bar{\lambda} \bar{v}$
iii) Si $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ son vectores característicos de *T* correspondientes a los valores $\lambda_1, \lambda_2 \; y \; \lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $(\, \bar{v}_1 | \bar{v}_2\, ) = 0$.

**Definición**

Sea *V* un espacio vectorial sobre C (sobre R) con producto interno y sea $T: V \to V$ un operador lineal, se dice que:

i) T es hermitiano (simétrico) si $T^* = T$
ii) T es antihermitiano (antisimétrico) si $T^* = -T$
iii) T es un unitario (ortogonal) si $T^* = T^1$

**Teorema**

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea $\lambda$ un valor característico del operador lineal $T: V \to V$:

i) Si $T^* = T$ entonces $\lambda$ es real
ii) Si $T^* = -T$ entonces $\lambda$ es imaginario
iii) Si $T^* = T^{-1}$ entonces $|\lambda| = 1$

**Teorema**

Sean *V* un espacio con producto interno, *B* una base ortonormal de *V*, $T: V \to V$ un operador lineal y *A* la representación matricial de *T* referida a la base *B*:

i) $T^* = T$ si y solo si $A^* = A$
ii) $T^* = -T$ si y solo si $A^* = -A$
iii) $T^* = T^{-1}$ si y solo si $A^* = A^{-1}$

**Teorema**

Sea *V* un espacio vectorial sobre *R*, de dimensión finita y con producto interno, y sea $T: V \to V$ un operador lineal. Si *T* es simétrico entonces tiene al menos un valor característico.

**Teorema**

Sea *V* un espacio vectorial sobre *C* (sobre *R*), de dimensión finita y con producto interno, y sea $T: V \to V$ un operador lineal.

Existe una base ortonormal de *V* formada por vectores característicos de *T* si y sólo si *T* es normal (simétrico).

**Teorema**

Sea *V* un espacio vectorial de dimensión $n$ y sea $T: V \to V$ un operador lineal. Existe una matriz diagonal asociada a *T*, referida a una base, si y sólo si V es la suma directa de los espacios característicos de *T*.

**Teorema (espectral)**

Sea V un espacio vectorial sobre *C* (sobre *R*), de dimensión finita y con producto interno, y sea $T: V \to V$ un operador normal (simétrico).

Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son los diferentes valores característicos de *T*, $\mathrm{E}(\lambda_i)$ es el espacio característico correspondiente a $\lambda_1$ y $P_i$ es la proyección ortogonal sobre $\mathrm{E}(\lambda_i)$, entonces:

i) $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k$
ii) $P_1 + P_2 + \cdots + P_k = I$
iii) $P_i \circ P_j = 0$, para $i \not\equiv j$