Espacios con Producto Interno

Definición: Producto interno

Sea *V* un espacio vectorial sobre *C*. Un producto interno en *V* es una función de VxV en *C* que asigna a cada pareja ordenada $(\bar{u}, \bar{v})$ de vectores de *V* un escalar $(\bar{u} | \bar{v}) \in C$, llamado el producto de $\bar{u}$ por $\bar{v}$, que satisface las siguientes propiedades:

i) $(\bar{u} | \bar{v}) = (\overline{\bar{v}|\bar{u}})$
ii) $(\bar{u} | \bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} | \bar{v}) + (\bar{u} | \bar{w})$
iii) $(\alpha\bar{u} | \bar{v}) = \alpha(\bar{u} | \bar{v})$
iv) $(\bar{u} | \bar{v}) > 0$ si $\bar{u} \neq \bar{0}$

Teorema

Sea *V* un espacio vectorial sobre *C* y sea (□|□) un producto interno en *V*; entonces, $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ y $\alpha \epsilon C$:

i) $(\bar{u} | \alpha\bar{v}) = \bar{\alpha}(\bar{u} | \bar{v})$
ii) $(\bar{u} | \bar{v}) \in R$
iii) $(\bar{0} | \bar{u}) = 0 = (\bar{u} | \bar{0})$
iv) $(\bar{u} | \bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sea V un espacio vectorial sobre C y sea (□|□) un producto interno en V; entonces $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$:

$|(\bar{u} | \bar{v})|^2 \leq (\bar{u} | \bar{u})(\bar{v} | \bar{v})$

Donde $|(\bar{u} | \bar{v})|$ es el módulo de $(\bar{u} | \bar{v})$. Además, la igualdad se cumple si y solo si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente dependientes.

Definición: Norma

Sea *V* un espacio vectorial sobre *C* y sea (□|□) un producto interno en *V*. Se llama norma de $\bar{v} \in V$, y se representa con $||\bar{v}||$, al número real no negativo definido por:

$$||\bar{v}|| = (\bar{v} | \bar{v})^{1/2}$$

Teorema

Si V es un espacio vectorial con producto interno, entonces $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ y $\alpha \epsilon C$:

i) $||\bar{v}|| \geq 0$
ii) $||\bar{v}|| = 0$ si y solo si $\bar{v} = \bar{0}$
iii) $||\alpha\bar{v}|| = |\alpha|\ ||\bar{v}||$
iv) $||\bar{u} + \bar{v}|| \leq ||\bar{u}|| + ||\bar{v}||$

Definición: Distancia entre vectores

Sea *V* un espacio vectorial con producto interno, y sean $\bar{u}, \bar{v} \in V$. Se llama distancia de $\bar{u}\ a\ \bar{v}$, y se representa con $d(\bar{u}, \bar{v})$, al número real definido por:

$d(\bar{u}, \bar{v}) = ||\bar{v} - \bar{u}||$

Teorema

Si *V* es un espacio vectorial con producto interno, entonces $\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$:

i) $d(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$
ii) $d(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ si y solo si $\bar{u} = \bar{v}$
iii) $d(\bar{u}, \bar{v}) = d(\bar{v}, \bar{u})$
iv) $d(\bar{u}, \bar{w}) \leq d(\bar{u}, \bar{v}) + d(\bar{v}, \bar{w})$

Definición: Ángulo entre vectores

Sea *V* un espacio vectorial con producto interno real, y sean $\bar{u}, \bar{v}$ dos vectores no nulos de *V*. Se llama ángulo entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ al número real θ, en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, tal que:

$$\cos\theta = \frac{(\bar{u} | \bar{v})}{||\bar{u}||\ ||\bar{v}||}$$

Definición: Vectores ortogonales

Sea V un espacio vectorial con producto interno. Dos vectores $\bar{u}, \bar{v} \in V$ son ortogonales si $(\bar{u} | \bar{v}) = 0$.

Definición: Conjunto ortogonal

Sea *V* un espacio con producto interno y sea $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ un conjunto de vectores de *V*. Se dice que *S* es un conjunto ortogonal cuando:

$(\bar{v}_i | \bar{v}_j) = 0, \forall\ i \neq j$

Si además $||\bar{v}_i|| = 1,\ \forall\ i$, el conjunto *S* es ortonormal.

Teorema

Un conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

Teorema (Proceso de Gram-Schmidt)

Sea *V* un espacio con producto interno y sea $G = \{\bar{v}_1, \ \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ un generador de *V*. El conjunto $G_0 = \{\bar{w}_1, \ \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n\}$ donde $\bar{w}_1 = \bar{v}_1$:

$$\bar{w}_i = \bar{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(\ \bar{v}_i \mid \bar{w}_k\ )}{(\ \bar{w}_k \mid \bar{w}_k\ )} \bar{w}_k$$

Para $i = 2,3, \dots, n$; es un generador ortogonal de V.

Definición: Vector ortogonal

Sea *V* un espacio con producto interno y sea *S* un subconjunto de *V*. Se dice que un vector $\bar{v} \in V$ es ortogonal al conjunto *S* si:

$$(\ \bar{v} \mid \bar{u}\ ) = 0 \ \ \forall \ \bar{u} \ \in S$$

El conjunto de todos los vectores de *V* ortogonales a *S* se denota con $S^{\perp}$; esto es:

$$S^{\perp} = \{\bar{v} \in V | (\ \bar{v} \mid \bar{u}\ ) = 0, \forall \ \bar{u} \ \in S\}$$

Teorema

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea W un subespacio de V de dimensión finita. Entones, cualquier vector $\bar{v} \in V$ puede expresarse en forma única como:

$$\bar{v} = \bar{w} + \bar{w}'$$

Donde $\bar{w} \in W$ y $\bar{w}' \in W^{\perp}$.

Definición: Proyección

Sean *V* un espacio con producto interno, *W* un subespacio de *V* de dimensión finita y $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ una base ortonormal de *W*.

$$\sum_{i=1}^{n} (\ \bar{v} \mid \bar{e}_i\ ) \bar{e}_i$$

Se llama la proyección de $\bar{v}$ sobre *W*.

Teorema (de proyección)

Sea V un espacio con producto interno y sea W un subespacio de V. Para cada vector $\bar{v} \in V$ existe uno y solo un vector $\bar{w}_0 \in W$ tal que:

$$||\bar{v} - \bar{w}_0|| < ||\bar{v} - \bar{w}||, \forall\, \bar{w} \in W, \bar{w} \neq \bar{w}_0$$

Dicho vector es la proyección de $\bar{v}$ sobre W.