Espacio Vectorial

Definición: Espacio vectorial

Sea *V* un conjunto no vacío y sea (K, +, ·) un campo. Se dice que *V* es un espacio vectorial sobre *K* si están definidas dos leyes de composición, llamadas adición y multiplicación por un escalar, tales que:

i) La adición asigna a cada pareja ordenada $(\bar{u}, \bar{v})$ de elementos de V un único elemento $\bar{u}+\bar{v} \in V$, llamado la suma de $\bar{u}$ y $\bar{v}$
ii) $\forall\ \bar{u},\bar{v},\bar{w} \in V:\ \bar{u}+(\bar{v}+\bar{w}) = (\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$
iii) $\exists\ \bar{0} \in$ V tal que $\bar{0}+\bar{v} = \bar{v} = \bar{v}+\bar{0}$, $\forall\ \bar{v} \in V$
iv) $\forall\ \bar{v} \in V\ \exists\ -\bar{v} \in V$ tal que $-\bar{v}+\bar{v} = \bar{0}$
v) $\forall\ \bar{u},\bar{v} \in V$: $\bar{u}+\bar{v} = \bar{v}+\bar{u}$
vi) La multiplicación por un escalar asigna a cada pareja ordenada (α, v) de elementos $\alpha \in K$ y $\bar{v} \in V$ un único elemento $\alpha\,\bar{v} \in V$, llamado el elemento de α por $\bar{v}$
vii) $\forall\ \alpha \in K;\ \bar{u},\bar{v} \in V: \alpha(\bar{u}+\bar{v}) = \alpha\bar{u}+\alpha\bar{v}$
viii) $\forall\ \alpha,\beta \in K;\ \bar{v} \in V: (\alpha+\beta)\bar{v} = \alpha\bar{v}+\beta\bar{v}$
ix) $\forall\ \alpha,\beta \in K;\ \bar{v} \in V: \alpha(\beta\bar{v}) = (\alpha\beta)\bar{v}$
x) Si 1 es la unidad de K: $1\bar{v} = \bar{v}$, $\forall\ \bar{v} \in V$

A los elementos de *V* se les llama vectores y a los de *K* escalares

Definición: Subespacio

Sea *V* un espacio vectorial sobre *K* y sea *S* un subconjunto de *V*. S es un subespacio de *V* si es un espacio vectorial sobre *K* respecto a la adición y la multiplicación por un escalar definidas en *V*.

Teorema

Sea *V* un espacio vectorial sobre *K* y sea *S* un subconjunto de *V*. S es un subespacio de *V* si y sólo si:

i) $\forall\ \bar{u},\ \bar{v} \in S$: $\bar{u}+\bar{v} \in S$
ii) $\forall\ \alpha \in K,\ \bar{v} \in S$: $\alpha\bar{v} \in S$

Definición: Combinación lineal

Un vector $\bar{w}$ es una combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ si puede ser expresado en la forma $\bar{w} = \alpha_1\bar{v}_1 + \alpha_2\bar{v}_2 + \cdots + \alpha_n\bar{v}_n$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

Definición: Dependencia lineal

Sea $S = \{ \bar{v}_1, \ \bar{v}_2 , \dots , \bar{v}_n \}$ un conjunto de vectores:

i) S es linealmente **dependiente** si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, no todos iguales a cero, tales $\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0}$

ii) S es linealmente **independiente** si la igualdad $\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{v}_n = \bar{0}$ solo se satisface con $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

Teorema

Todo conjunto que contiene al vector $\bar{0}$ es linealmente dependiente.

Definición: Generador

Sea *V* un espacio vectorial sobre *K*, y sea $G = \{ \bar{v}_1, \ \bar{v}_2 , \dots , \bar{v}_m \}$ un conjunto de vectores de *V*. Se dice que *G* es un generador de *V* si para todo vector $\bar{x} \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ tales que $\bar{x} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \cdots + \alpha_m \bar{v}_m$.

Definición: Base

Se llama base de un espacio vectorial V a un conjunto generador de V que es linealmente independiente.

Definición: Dimensión

Sea *V* un espacio vectorial sobre *K*. Si $B = \{ \bar{v}_1, \ \bar{v}_2 , \dots , \bar{v}_n \}$ es una base de *V* se dice que *V* es de dimensión n, lo cual se denota con $\dim V = n$.

En particular, si $V = \{ \bar{0} \}$, $\dim V = 0$

Definición: Vector de coordenadas

Sea $B = \{ \bar{v}_1, \ \bar{v}_2 , \dots , \bar{v}_n \}$ una base de un espacio vectorial *V* sobre *K* y sea $\bar{x} \in V$. Si $\bar{x} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{v}_n$ los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ se llaman coordenadas de $\bar{x}$ en la base *B*; y el vector de K^n $(\bar{x})_B = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \dots \ \ \alpha_n)^T$ se llama vector de coordenadas de $\bar{x}$ en la base *B.*

Definición: Espacio renglón

Sea $A = [\alpha_{ij}]$ una matriz de $m \, x \, n$ con elementos en un campo K, y sea $\bar{r}_i = (\alpha_{i1}, \ \alpha_{i2} \dots \ \alpha_{in})$ el i-ésimo renglón de *A*. Si $A_r = \{ \bar{r}_1, \ \bar{r}_2 , \dots , \bar{r}_m \}$, el conjunto $L(A_r)$ se llama espacio renglón de *A*.

Definición: Espacio columna

Sea $A = [\, \alpha_{ij} \,]$ una matriz de $m\, x\, n$ con elementos en un campo *K*, y sea $\bar{c}_i = (\, \alpha_{1i},\ \alpha_{2i} \dots\ \alpha_{mi}\,)^T$ la i-ésima columna de *A*. Si $A_c = \{\, \bar{c}_1,\ \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n \,\}$, el conjunto $L(A_c)$ se llama espacio columna de *A*.

Teorema

Para cualquier matriz *A* se tiene que $\dim L(A_r) = \dim L(A_c)$

Definición: Rango

Se llama rango de una matriz A, y se denota con R(A), al número $R(A) = \dim L(A_r) = \dim L(A_c)$

Teorema

Sea $\{\, \bar{f}_1,\ \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_n \,\}$ un conjunto de n funciones reales de variable real, derivables al menos $n-1$ veces en el intervalo (a, b); y sea

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_n(x) \\ f_1{}'(x) & f_2{}'(x) & f_n{}'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Si $W(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in (a,\ b)$, entonces el conjunto de funciones es linealmente independiente en dicho intervalo.