Tema 3. Métodos de integración

Objetivo:
El alumno aplicará métodos de integración y los utilizará en la resolución de problemas geométricos.

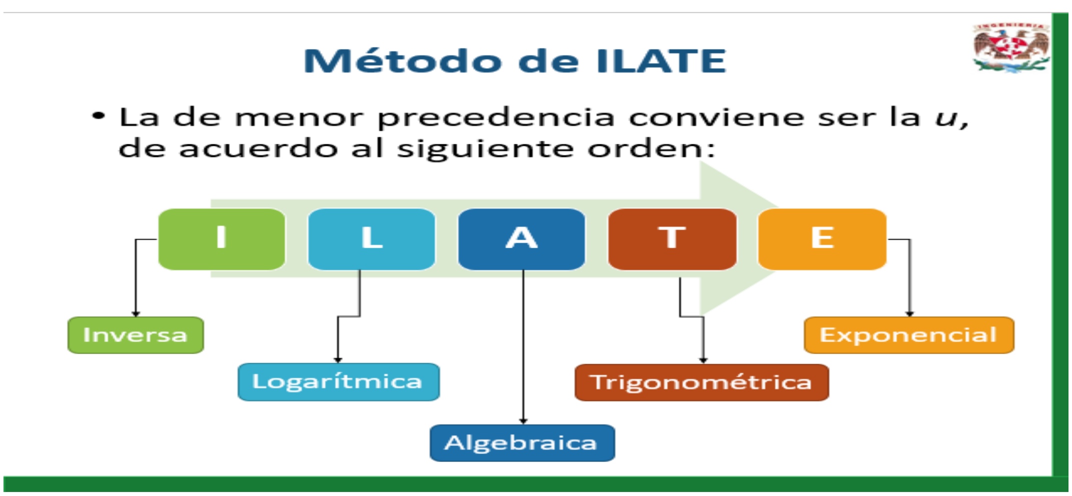
Subtema 3.1. Integración por partes.

Método de integración por partes

Este método puede ser aplicado cuando la función integrando está formada por la multiplicación de dos funciones.

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \Rightarrow d(uv) = udv + vdu$$
$$udv = d(\mathrm{uv}) - \mathrm{vdu}$$
$$\int udv = \int d(\mathrm{uv}) - \int \mathrm{vdu}$$

Donde:
- u es una función fácil de derivar
- dv es una función fácil de integrar
- $\int vdu$ es más sencilla que la integral inicial.



EJERCICIO 1) $\int x^2 e^x dx$

$$u = x^2 \qquad dv = e^x$$
$$du = 2x\, dx \qquad v = e^x$$
$$f\int x^2 e^x dx = e^x x^2 - \int 2xe^x$$
$$\int 2xe^x \qquad u = 2x \qquad du = 2dx \qquad dv = e^x \qquad v = e^x$$
$$e^x x^2 - \left[(2xe^x) - \int 2e^x dx\right] \qquad e^x x^2 - (2xe^x) + 2e^x + c$$
$$e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c \qquad \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

EJERCICIO 2) $\int x \operatorname{sen}(x)\, dx$

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = \operatorname{sen}(x)\, dx \qquad v = -\cos(x)$$
$$\int x \operatorname{sen}(x)\, dx = -x\cos(x) - \int -\cos x dx$$
$$\int x \operatorname{sen}(x)\, dx = -x\cos(x) + \int \cos x\, dx$$
$$= -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + c$$

EJERCICIO 3) $\int \ln(x)\,dx$

$$u = \ln(x) \qquad du = \tfrac{1}{x}\,dx$$
$$dv = dx \qquad v = x$$

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int \tfrac{x}{x}\,dx$$

$$= x\ln(x) - \int dx$$

$$\int \ln(x)\,dx = \underline{x\ln(x) + x + c}$$

EJERCICIO 4) $\int e^{x}\,\mathrm{sen}(x)$

$$u = \mathrm{sen}\,x \qquad du = \cos x\,dx$$
$$dv = e^{x}\,dx \qquad v = e^{x}$$

$$= e^{x}\,\mathrm{sen}\,x - \int e^{x}\cos x\,dx \qquad \int e^{x}\cos x\,dx$$

$$= e^{x}\int \cos x\,dx = e^{x}\cos x - \int e^{x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx$$

1) $\int e^x \operatorname{sen} x$

$$u = \operatorname{sen} x \qquad du = \cos x\, dx$$

$$dv = e^x dx \qquad v = e^x$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx \rightarrow (1)$$

Integrando ahora $\int e^x \cos x\, dx$

$$u = \operatorname{sen} x \qquad du = \cos x\, dx$$

$$dv = e^x dx \qquad v = e^x$$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x - \int -\operatorname{sen} x\ e^x\ dx$$

$$= e^x \cos x + \int \operatorname{sen} x\ e^x\ dx \rightarrow (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x + \int \operatorname{sen} x\, e^x\ dx\right)$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int \operatorname{sen}(x)\, e^x\ dx$$

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + c$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}\left(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x\right) + c$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^x}{2}\left(\operatorname{sen} x - \cos x\right) + c}}$$

EJERCICIO

5) $\int ang\tan(x)\,dx$

$u = ang\tan(x);\ dv = dx$

$du = \frac{1}{1+x^2}dx \qquad v = x$

Por lo que se tiene $x\,ang\tan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx;$

Ahora integrando a $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ *que es integral inmediata*

$w = 1+x^2$

$dw = 2x\,dx$

$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2}\ln w$

$$= x\tan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

Subtema 3.2. Integrales de expresiones trigonométricas e integración por sustitución trigonométrica.

Identidades del seno de la suma de ángulos:

$$sen(A+B) = senA\cos B + senB\cos A...(1)$$
$$sen(A-B) = senA\cos B - senB\cos A...(2)$$
$$sumamos\ (1)+(2)$$
$$sen(A+B) + sen(A-B) = 2senA\cos B$$
$$\boxed{senA\cos B = \frac{1}{2}\left[sen(A+B)+sen(A-B)\right]}$$

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - senAsenB...(1)$

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + senAsenB...(2)$

sumamos $(1)+(2)$

$\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$

$$\boxed{\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]}$$

EJERCICIO

$\int sen\ 3x\ \cos\ 5x\ dx$

Utilizando la identidad $\frac{1}{2}\ sen(a+b) + \frac{1}{2} sen(a-b)$

$a = 3x;\quad b = 5x$

$\int \frac{1}{2}\ sen(3x+5x)dx\ +\ \int \frac{1}{2}\ sen(3x-5x)dx$

$= \frac{1}{2}\int sen\ 8x\ dx + \frac{1}{2}\int sen\ (-2x)\ dx \quad =>$

$u = 8x \qquad\qquad v = -2x$

$du = 8dx \qquad\qquad dv = -2dx$

$\int sen\ 3x\ \cos\ 5x\ dx$

Utilizando la identidad $\frac{1}{2}\ sen(a+b) + \frac{1}{2} sen(a-b)$

$a = 3x;\quad b = 5x$

$\int \frac{1}{2}\ sen(3x+5x)dx\ +\ \int \frac{1}{2}\ sen(3x-5x)dx$

$= \frac{1}{2}\int sen\ 8x\ dx + \frac{1}{2}\int sen\ (-2x)\ dx \quad =>$

$u = 8x \qquad\qquad v = -2x$

$du = 8dx \qquad\qquad dv = -2dx$

EJERCICIO

$$\int \cos 7x \cos 9x \, dx$$

Utilizando la identidad $\frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$

$a = 7x; \quad b = 9x$

$$\int \frac{1}{2}\cos(7x+9x)dx + \int \frac{1}{2}\cos(7x-9x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 16x \, dx + \frac{1}{2}\int sen\,(-2x)\,dx \quad =>$$

$u = 16x \qquad\qquad v = -2x$

$du = 16dx \qquad\qquad dv = -2dx$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{16}\int \cos 16x(16)dx + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int \cos\,(-2x) - 2dx \quad =>$$

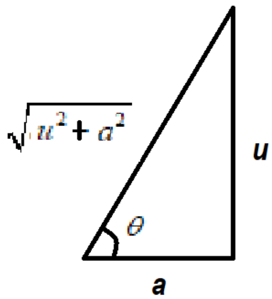
$$= \frac{1}{32} sen\, 16x + \frac{1}{4} sen(-2x) + C$$

Integración por sustitución trigonométrica

El método de sustitución trigonométrica se puede aplicar cuando hay una suma o diferencia de cuadrados.

Se puede considerar un triángulo rectángulo en el que se nombran los catetos y la hipotenusa según convenga.

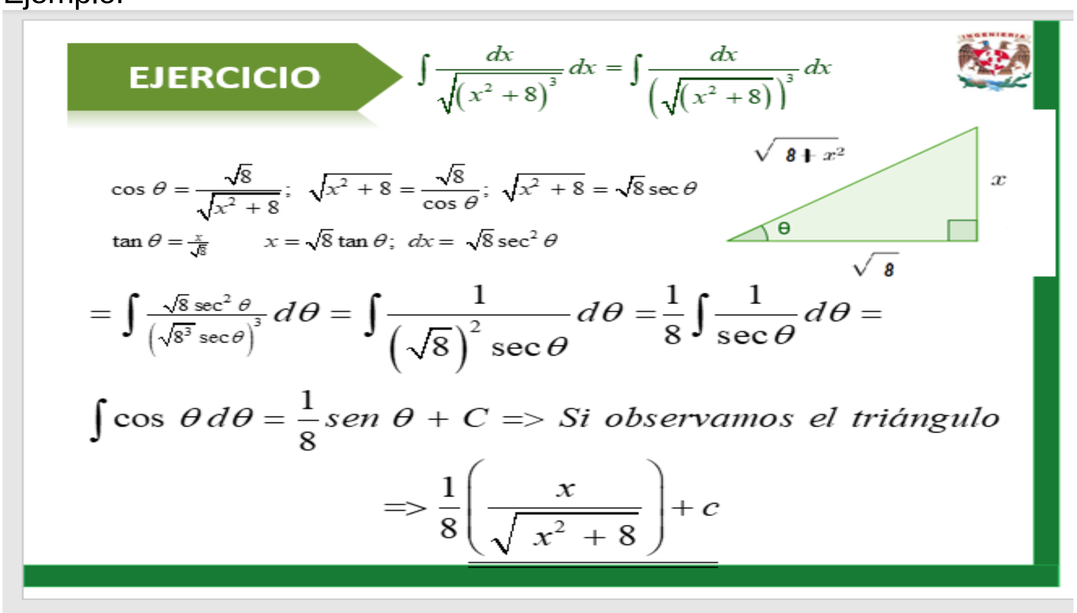
- Si es suma de cuadrados conviene que los catetos sean representados por los valores que están elevados al cuadrado.



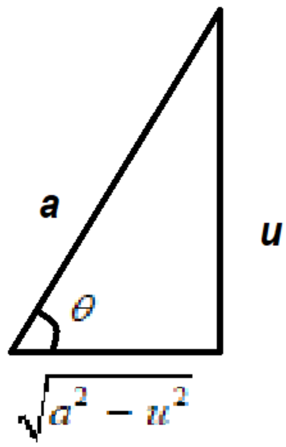
$$u = a\tan\theta$$

$$\sqrt{u^2 + a^2} = a\sec\theta$$

Ejemplo:

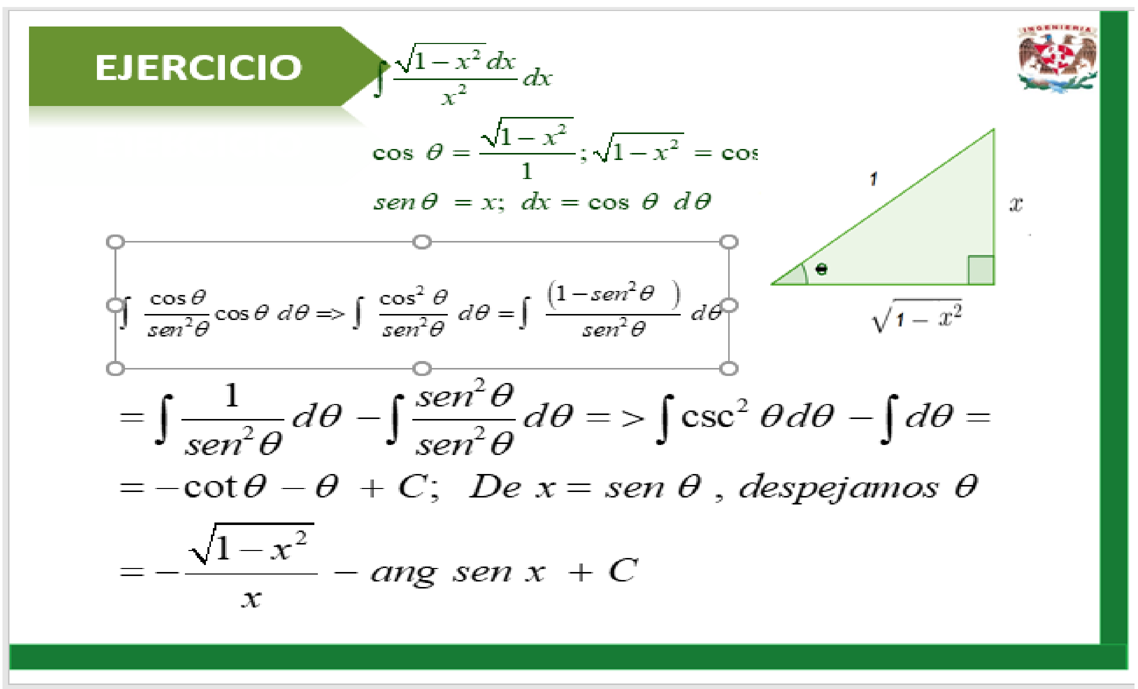


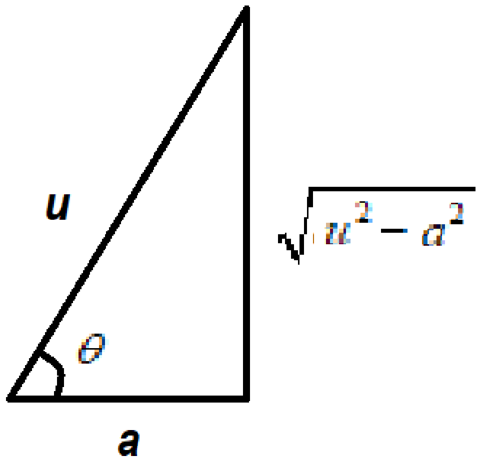
- Si es una diferencia de cuadrados, la variable que está elevada al cuadrado y que le anteceden en signo positivo conviene que sea la hipotenusa.



$u = a\, sen\theta$

$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos\theta$





$u = a \sec\theta$

$\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan\theta$

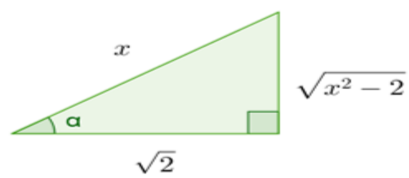
Ejemplo:

EJERCICIO $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$

$u = \tan x \qquad du = \sec^2 x$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{x^2-2}}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-2}}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}} \qquad \sec\alpha = \frac{x}{\sqrt{x}}$



$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} \qquad \sqrt{2}\sec\alpha = x \qquad \sqrt{2}\sec\alpha\tan\alpha = dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{\cot\alpha}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \sec\alpha \tan\alpha \, d\alpha$$

$$= \int \cot\alpha \cdot \sec\alpha \cdot \tan\alpha \;\, d\alpha =$$

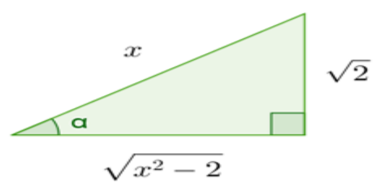
$$\int \frac{\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos\alpha}} \cdot \frac{\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}{\cos\alpha}\, d\alpha = \int \frac{1}{\cos\alpha}\, d\alpha = \int \sec\alpha \; d\alpha$$

$$\int \sec\alpha \; d\alpha = \ln\left|-\sec(\alpha) + \tan(\alpha)\right| + c$$

Sustituyendo=

$$= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right| + c$$

O también: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{x} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\tan\alpha = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{x^2-2}}{x} \qquad \sec\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$$

$$\sqrt{2}\csc\alpha = x \qquad \frac{1}{x}\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} \qquad -\sqrt{2}\csc\alpha\cdot\cot\alpha \; d\alpha = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\tan\alpha \cdot \cancel{-\sqrt{2}}\;\csc\alpha\cdot\cot\alpha \; d\alpha$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}}\;\cancel{\tan\alpha}\cdot -\sqrt{2}\csc\alpha \cdot \frac{1}{\cancel{\tan\alpha}}\, d\alpha =$$

$$= \int -\csc\alpha \; d\alpha =$$

$$-\int \csc\alpha \; d\alpha = \ln\left|\csc(\alpha) + \cot(\alpha)\right| + c$$

Sustituyendo=

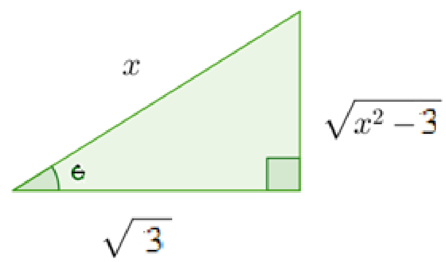
$$= \ln\left|\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right| + c$$

EJERCICIO

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}dx$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}; \qquad x\,sen\theta = \sqrt{x^2-3}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{x}; \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}; \; x = \sqrt{3}\ \sec\theta$$



$$dx = \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta$$

$$\int \frac{x\ sen\ \theta\ \sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{x} = \int \frac{\sqrt{3}sen\ \theta\ sen\ \theta\, d\,\theta}{\cos^2\theta} = \sqrt{3}\int \frac{sen^2\ \theta\ \ d\,\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\sqrt{3}\int\frac{\left(1-\cos^2\theta\right)d\theta}{\cos^2\theta} = \sqrt{3}\int\frac{d\theta}{\cos^2\theta} - \sqrt{3}\int\frac{\left(\cos^2\theta\right)d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{3}\int\sec^2\theta - \sqrt{3}\int d\theta = \sqrt{3}\ \tan\ \theta - \sqrt{3}\theta$$

$$Pero\ del\ tri\acute{a}ngulo\ se\ observa\ que\ \tan\ \theta = \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}$$

$$despejando\ \theta = ang\ \tan\left(\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \int\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx = \sqrt{3}\tan\theta - \sqrt{3}\theta + C \Rightarrow \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3}ang\ \tan\left(\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \sqrt{x^2-3}\ -\ ang\ \tan\left(\sqrt{x^2-3}\right)\ + C$$

Ejemplos:

- Integrales de la forma: $\int sen^m u \cos^n u\, du$, $\int \tan^n u\, du$, $\int \cot^n u\, du$, $\int \sec^n u\, du$, $\int csc^n\, du$, $\int \sec^m u \tan^n u\, du$, $\int csc^m u \cot^n u\, du$, $\int sen\, m\, u \cos n\, u\, du$, $\int \cos m\, u \cos n\, u\, du$, $\int sen\, m\, u\, sen\, n\, u\, du$.

Puede transformarse el integrando a la forma $\int u^n\ du$

Hay que tener en cuenta las identidades trigonométricas:

$$sen^2 x + cos^2\, x = 1$$
$$sec^2\, x - tan^2\, x = 1$$
$$csc^2\, x - cot^2\, x = 1$$

Caso 1: $\int sen^n u du$; $\int cos^n u du$

"n" es un entero impar

Conservar un factor: $senu$ o $cosu$

Y usar la identidad: $sen^2 u + cos^2 u = 1$

EJERCICIO

$\int \cos^5 (x) dx;$

Integral del caso 1

$\int \cos^4 x \cos x\, dx = \int (\cos^2 x)^2\ \cos x\ dx;$

usando la identidad $sen^2 x + \cos^2\, x = 1$

$= \int (1 - sen^2\ x)\cos x\ dx \Rightarrow u = sen\ x;\ \ du\ = \cos\ x\ dx$

$= \int (1 - u^2)^2\ du;\ \ \int (1 - 2u + u^4) du =$

$u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^4}{5} + C$

$= sen\ x - \frac{2}{3} sen^3 x + \frac{1}{5} sen^4 x + C$

EJERCICIO

$$\int \text{sen}^3(x)\,dx;$$

Integral del caso 1

$$\int sen^2 x\ sen\ x\ dx = \int (1-\cos^2 x)\ \text{sen x dx}; \quad u$$

$$= \cos x,\ du = -\,sen\ x\ dx$$

$$= \int (1-u^2)(-du) = -\int u\ du + \int u^2\ du = -u + \frac{1}{3}u + c; =>$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos{}^3 x + C$$

Caso 2:

$$\int sen^n u\ cos^m u du$$

Al menos uno de los exponentes es impar

Conservar un factor:

$$senu$$

$$cosu$$

Y usar la identidad:

$$sen^2 u + cos^2 u = 1$$

EJERCICIO

$$\int \cos^3(x)\,sen^2 x dx;$$

Integral del caso 2

$$\int \cos^2 x\ senx^2\ \cos x\ dx;\ si\ u = sen\ x;\quad du = \cos x\ dx$$

$$\int (1 - sen^2\ \text{x})sen^2\ x\cos x\ dx =$$

$$= \int (\text{sen}^2\ \text{x} - sen^4\ \text{x})\ \text{cosx dx} =>$$

$$= \int\ \text{sen}^2\ \text{x cos x dx} - \int sen^4 x \cos x\ dx;\quad si\ u = sen\ x$$

$$y\ du = \cos x\ dx$$

$$\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= \frac{1}{3}\ sen^3 x - \frac{1}{5}sen^5 x + C$$

EJERCICIO

$$\int sen^3(x)\cos^2 x dx;$$

Integral del caso 2

$$\int sen^2 x \cos x^2 \; sen\, x\; dx;\; si\; u = \cos x;\;\; du = -sen\; x\; dx$$

$$\int (1-\cos^2 x)\cos x^2 \;\; x\; sen\; x\; dx =$$

$$= \int (\cos^2 x - \cos^4 x)\, senx\;\; dx =>$$

$$= \int \;\; \cos^2 x \;\; sen\, x \;\; dx - \int \cos^4 x senx\;\; dx;\;\; si\; u = \cos\; x$$

$$y\;\; du = -sen\; x\; dx$$

$$-\frac{1}{3}\,u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

EJERCICIO

$$\int sen^5(x)\cos^3 x dx;$$

Integral del tipo caso 2

$$\int sen^5 x \cos x^2 \;\; \cos x\;\; dx;\; si\; u = senx;\;\; du = \cos\; x\; dx$$

$$\int \mathrm{sen}^5 x(1 - sen^2\; x)\cos x \quad dx =$$

$$= \int (sen^5\; x - sen^7\; x)\cos x\;\; dx =>$$

$$= \int \;\; sen^5\; x\; \cos x\;\; dx - \int sen^7 x \cos x\;\; dx;\;\; si\; u = sen\; x$$

$$y\;\; du = \cos x\;\; dx$$

$$-\frac{1}{6}\,u^6 - \frac{1}{8}u^8 + C$$

$$= -\frac{1}{6}\; sen^6 x - \frac{1}{8} sen^8 x + C$$

Caso 3:

$$\int sen^n u du$$

$$\int cos^n u du$$

"n" es un entero par

Usar la identidad:

$$sen^2 u = \frac{1 - cos2u}{2}$$

$$cos^2u = \frac{1 + cos2u}{2}$$

EJERCICIO

$\int \cos^2 x dx;$

Integral del tipo caso 3

Por *identidad* $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx;$

$\int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x \quad dx =$

$= \frac{x}{2} + \int \frac{1}{2}\cos 2x\ dx;\ u = 2x;\ du = 2dx1$

$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\cos u\ du$

$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} sen\ 2x + C$

EJERCICIO

$\int sen^2 x dx;$

Integral del tipo caso 3

Por *identidad* $sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx;$

$\int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2}\cos 2x \quad dx =$

$= \frac{x}{2} - \int \frac{1}{2}\cos 2x\ dx;\ u = 2x;\ du = 2dx$

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\cos u\ du$

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} sen\ 2x + C$

Caso 4:

$$\int sen^n u\ cos^m u du$$

"m" y "n" son par
Usar la identidad:

$$sen^2u = \frac{1 - cos2u}{2}$$
$$cos^2u = \frac{1 + cos2u}{2}$$

EJERCICIO

$\int sen^2 x \cos^2 x \ dx;$

Integral del tipo caso 4

Por *uso de identidad* $sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx;$

$\int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \quad dx =$

Pero $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - sen^2 x \ y \ \cos^2 x = 1 - 2sen^2 x$

$= \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{4}\int \left(1 - 2sen^2 x\right)^2 \quad dx =$

$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \left(1 - 2sen^2 x\right)^2 \quad dx$

$= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \left(1 - 2sen^2 x\right)^2 \quad dx$

Desarrollando el binomio al cuadrado

$\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int \left(1 - 4sen^2 x + 4sen^4 x\right) \quad dx$

$\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int sen^2 x + \int \left(sen^2 x\right)^2$

Como $\int sen^2 x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} sen\ 2x$

Tendriamos

$\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} sen\ 2x\right) + \int \left(sen^2 x\right)^2$

Sabiendo la identidad del $sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

Sustituimos en $\int \left(sen^2 x\right)^2$ *quedando*

$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2$, *desarrollamos el binomio*

$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2$, *desarrollamos el binomio*

$\int \frac{1}{4} dx + \int \frac{2}{4}\cos 2x \ dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \ dx$

Ahora hay que tener en cuenta que la identidad

de $\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)$

Por lo que está integral queda solamente

$\frac{x}{4} - \frac{1}{4} xsen2x + \frac{1}{8}x + \frac{sen\ 4x}{32}$

Finalmente :

$\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} sen\ 2x\right) + \int \left(sen^2 x\right)^2 =$

$\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} sen\ 2x\right) + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{4} xsen2x + \frac{1}{8}x + \frac{sen\ 4x}{32}\right)$

En ambas expresiones

Caso 5:

$$\int sec^n u \; tan^m u du$$
$$\int csc^n u \; cot^m u du$$

"n" es un entero positivo par
Separar y conservar un factor:

$$sec^2 u$$
$$csc^2 u$$

Y usar la identidad:

$$1 + tan^2 u = sec^2 u$$
$$1 + cot^2 u = csc^2 u$$

EJERCICIO

$\int tan^4 \text{ x } dx;$

$\int tan^2 \text{ x } tan^2 \text{ x } dx;$ utilizando una identidad trigonométrica

$\int tan^2 \text{ x } (\sec^2 \text{x} - 1)dx;$ *distribuimos*

$\int tan^2 \text{ x } \sec^2 \text{xdx} - \int \tan^2 xdx;$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x dx$

$$\int u^2 du - \int (\sec^2 x - 1)dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x \; - x + C$$

EJERCICIO

$\int \csc^6 m\, dm;$

$\int (\csc^2 m)^2 \csc^2 m dm;$ utilizando una identidad trigonométrica

$\int (1+\cot^2 m)\cot^2 m\, dm;$

$u = \cot m$

$du = -\csc^2 m\, dm$

$-\int (1+u^2)^2 du = -\left(\int u^4 + 2u^2 + 1\right) du$

$-\frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} - u + C => -\frac{\cot^5 m}{5} - \frac{2}{3}\cot^3 m - \cot m + C$

EJERCICIO

$\int \sec^4 x\, dx;$

$\int \sec^2 x \sec^2 x\, dx;$ utilizando una identidad trigonométrica

$\int tan^2 x\,(1+tan^2 x)dx;$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x\, dx$

$\int (1+u^2) du = u + \frac{u^3}{3} + C$

$\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + C$

EJERCICIO

$$\int tan^4 x\, dx;$$

$$\int tan^2 x\, tan^2 x\, dx;$$ utilizando una identidad trigonométrica

$$\int tan^2 x\,(\sec^2 x - 1)dx;$$ *distribuimos*

$$\int tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx;$$

$$u = \tan x$$

$$du = \sec^2 x\, dx$$

$$\int u^2 du - \int (\sec^2 x - 1)dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x \; - x + C$$

EJERCICIO

$$\int \frac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}} dx;$$

$$\int \frac{(\sec^2 x)(\sec^2 x)}{\sqrt{\tan x}} dx;$$ utilizando una identidad trigonométrica

$$\int \frac{(1+\tan^2 x)(\sec^2 x)}{\sqrt{\tan x}} dx = \int \frac{(\sec^2 x)}{\sqrt{\tan x}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du + \int u^{\frac{3}{2}} du =$$

$$\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C \Rightarrow \; + C = 2\sqrt{u} + \frac{2}{5}\sqrt{u^5}$$

$$2\sqrt{\tan x} + \frac{2}{5}\sqrt{\tan^5 x}$$

Caso 6:

$$\int sec^n u \; tan^m u du$$
$$\int csc^n u \; cot^m u du$$

"n" y "m" son enteros positivos e impares
Separar y conservar un factor:

$$secu \, tanu$$

Y usar la identidad

$$1 + tan^2 u = sec^2 u$$
$$1 + cot^2 u = csc^2 u$$

Caso 7:

$$\int sec^n u \; tan^m u du$$
$$\int csc^n u \; cot^m u du$$

"m" es un entero positivo par "n" es un entero positivo impar
Expresar el integrando en términos de potencias impares de la secante o la cosecante usando la identidad:

$$1 + tan^2 u = sec^2 u$$
$$1 + cot^2 u = csc^2 u$$

EJERCICIO $\int (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))^2 \, dx$

$$u = \operatorname{sen} x \qquad du = \cos x$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \cos^2(x)\,dx$$

$$\int -2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + 1 \; dx = \int -2\operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx + \int 1\,dx =$$

$$-2\int u\,du + x =$$

$$= \underline{\underline{\operatorname{sen}^2(x) + x + c}}$$

Subtema 3.3. Integración por descomposición en fracciones racionales.

El método de fracciones parciales se utiliza cuando quiere integrarse una expresión de la forma $\frac{Q(x)}{P(x)}$, donde el numerador y el denominador son polinomios y el grado de Q(x) es mayor o igual que el grado de P(x), debe utilizarse el algoritmo de la división.
Por el teorema fundamental del álgebra se sabe el polinomio P(x) puede fraccionarse en polinomios irreducibles de grado uno y de grado dos (un polinomio de grado dos es irreducible si no tiene raíces reales). Entonces se tienen cuatro casos.
Caso 1(Raíces reales, ninguna de ellas repetidas)
P(x) se factoriza como un producto de factores de grado uno distintos; es decir, $P(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_nx + b_n)$ Entonces existen números reales $A_1, A_2, \dots, A_n$ tal que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(a_nx + b_n)}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \int \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} dx + \int \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} dx + \cdots + \int \frac{A_n}{(a_nx + b_n)} dx$$

Caso 2 (Raíces reales repetidas)
P(x) se factoriza como un producto de factores de grado uno todos repetidos; es decir, $P(x) = (ax + b)^n$ Entonces existen números reales $A_1, A_2, \dots, A_n$ tal que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(ax + b)} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \int \frac{A_1}{(ax + b)} dx + \int \frac{A_2}{(ax + b)^2} dx + \cdots + \int \frac{A_n}{(ax + b)^n} dx$$

Caso 3(Raíces complejas todas distintas)
P(x) se factoriza como un producto de factores irreducible de grado dos todos distintos; es decir, $P(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \dots (a_nx^2 + b_nx + c_n)$
Entonces existen números reales $A_1, A_2, \dots, A_n$ y $B_1, B_2, \dots, B_n$ tal que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)} + \frac{A_2x + B_2}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(a_nx^2 + b_nx + c_n)}$$

Por lo que

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \int \frac{A_1x + B_1}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)} dx + \int \frac{A_2x + B_2}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)} dx + \dots + \int \frac{A_nx + B_n}{(a_nx^2 + b_nx + c_n)} dx$$

Caso 4 (Raíces complejas repetidas)
P(x) se factoriza como un producto de factores irreducibles de grado dos todos repetidos; es decir, $P(x) = (ax^2 + bx + c)^n$ Entonces existen números reales $A_1, A_2, \dots, A_n$ y $B_1, B_2, \dots, B_n$ tal que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Por lo que

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx = \int \frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)}dx + \int \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2}dx + \ ... + \int \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}dx$$

Sustituciones diversas.

- Ejemplificar la integración de funciones que requieran sustituciones distintas a los casos mostrados anteriormente. Así por ejemplo

$$\int x^2 \sqrt{x+1}\ dx$$

se puede resolver mediante la sustitución

$$u = \sqrt{x+1}$$
$$u^2 = x + 1$$
$$x = u^2 - 1$$
$$dx = 2udu$$

Al sustituir en la integral se obtiene una expresión que permite integrar de forma inmediata.

EJERCICIO $\int \frac{dx}{x^3 - 9x^2}$

$$\int \frac{dx}{x^3-9x^2} = \int \frac{dx}{x^2(x-9)} = \int\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-9)}\right)dx$$

$$\frac{1}{x^3-9x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-9)}$$

$$\frac{1}{x^3-9x^2} = \frac{Ax(x-9)+B(x-9)+C(x^2)=}{x^2(x-9)}\ se\ suprimen\ los\ denominadores$$

Se puede trabajar la igualdad de polinomios

$$1 = Ax^2 - 9Ax + Bx - 9B + Cx^2;\ agrupamos\ términos$$

$$1 = (A + C)x^2 + (-9A + B)x + (-9B)\ igualamos\ términos$$

$$A + C = 0$$

$$-9A + B = 0$$

$$-9B = 1;\ B = -\frac{1}{9}$$

Subtema 3.4. Aplicaciones de la integral definida al cálculo de: área en coordenadas cartesianas, longitud de arco en coordenadas cartesianas y polares, y volúmenes de sólidos de revolución.

$A = -\frac{1}{81}; \quad B = -\frac{1}{9} \qquad C = \frac{1}{81}$

Sustituyendo=

$$\int \frac{dx}{x^3 - 9x^2} = \int \left(-\frac{1}{81x} + \frac{-1}{9x^2} + \frac{1}{81(x-9)} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{81} \ln|x| - \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{81} \ln|x-9| + C$$

$$= -\frac{1}{81} \ln|x| + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{81} \ln|x-9| + C$$

EJERCICIO $\int \frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x} dx$

$$\int \frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} dx$$

$$\frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

Obtenemos el Máximo Común Divisor

que y lo escribimos en el denominador y trabajamos el numerador

$$\frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + C(x)(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

Otra forma es ver qué valores hacen cero el numerador

Los valores son en $x = 1,\ x = -2 \ y \ x = 0$

Ahora sustituimos en el numerador de la ecuación.

$$Si\ x = 1$$

$$2(1) + 3 = A(1-1)(1+2) + B(1)(1+2) + C(1)(1-1)$$

$$5 = 3B \Rightarrow B = \frac{5}{3}$$

$$Si\ x = 0$$

$$2(0) + 3 = A(0-1)(0+2) + B(0)(0+2) + C(0)(0-1)$$

$$3 = -2A \Rightarrow \quad A = -\frac{3}{2}$$

$$Si\ x = -2$$

$$2(-2) + 3 = A(-2-1)(-2+2) + B(2)(-2+2) + C(-2)(-2-1)$$

$$6C = -1;\ C = -\frac{1}{6};\ \textit{sustituimos en la expresión}\ \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

$$\frac{-\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{(x-1)} + \frac{-\frac{1}{6}}{(x+2)},\ \textit{ahora integramos}$$

$$-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int\frac{dx}{(x-1)} + -\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x+2)}$$

$$= -\frac{3}{2}\ln x + \frac{5}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x+2) + C$$

Utilizando propiedades de logaritmo

$$\ln x^{-\frac{3}{2}} + \ln(x-1)^{\frac{5}{3}} + \ln(x+2)^{-\frac{1}{6}} + C$$

$$\ln x^{-\frac{3}{2}}\ (x-1)^{\frac{5}{3}}\ (x+2)^{-\frac{1}{6}} + C \quad \textit{reacomodando y usando leyes de los exponentes}$$

$$\ln\frac{\sqrt[3]{(x-1)^5}}{\sqrt{x^3}\ \sqrt[6]{x+2}} + C$$

EJERCICIO $\int \frac{x+1}{3x^2+3x-6}\,dx$

$$\int \frac{x+1}{3x^2+3x-6}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}\,dx = \int \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)}\,dx$$

$$A(x-1)+B(x+2)=x+1 \qquad (A+B)x=(1)x$$

$$Ax-A+Bx+2B=x+1 \qquad (-A+2B)=1$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \end{array}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{r} R_1 \\ R_1+R_2 \to R_2 \end{array}\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Despejando:

$$3B=2 \qquad A+B=1 \qquad A=B-1$$

$$B=\tfrac{2}{3} \qquad A=1-\tfrac{2}{3} \qquad A=\tfrac{1}{3}$$

Sustituyendo A y B:

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{3(x+2)} + \frac{1}{3}\int \frac{2}{3(x-1)}\,dx =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{9}\ln|x+2| + \frac{2}{9}\ln|x-1| + C}}$$

EJERCICIO

$$\int \frac{e^x \, dx}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}$$

$Si\ u = e^x,\ du = e^x\ dx$

$$\int \frac{du}{(u^2+1)(u-1)}$$

$$\frac{1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{C}{u-1}$$

$Máximo\ común\ divisor\ (u^2+1)(u-1)$

$$\frac{1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{(Au+B)(u-1)+C(u^2+1)}{(u^2+1)(u-1)}$$

$Los\ valores\ de\ x = 1,\ x = i\ o\ x = -i$

$Si\ u = 1$

$(Au+B)(u-1)+C(u^2+1)$

$Si\ u = 1$

$1 = (Au+B)(u-1)+C(u^2+1)$

$2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$Si\ u = i$

$1 = (Ai+B)(i-1)+C(-1+1)$

$1 = Ai^2 + Bi - Ai - B$

$1 = -A + Bi - Ai - B$

$-A - B = 1$

$-A + B = 0$

$-2A = 1;\ A = -\frac{1}{2}$

$B = A$

$$\int \frac{\left(-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}\right)du}{u^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}du$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}du => -\frac{1}{2}\int \left(\frac{u}{u^2+1}\right)du+\frac{1}{2}\int \frac{1du}{u^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}du$$

La integral $-\frac{1}{2}\int \left(\frac{u}{u^2+1}\right)du;\ w=u^2+1,\ dw=2u\ du,$ *se completa la diferencial*

quedando $-\frac{1}{4}\int \left(\frac{dw}{w}\right)=-\frac{1}{4}\ln w=-\frac{1}{4}\ln\left(u^2+1\right)$

Por lo tanto queda $-\frac{1}{4}\ln\left(u^2+1\right)+\frac{1}{2}ang\tan u+\frac{1}{2}\ln\ (u-1)+C$

$$-\frac{1}{4}\ln\left(e^{2x}+1\right)+\frac{1}{2}ang\tan e^x+\frac{1}{2}\ln\ (e^x-1)+C$$

EJERCICIO

$$\int \frac{dx}{x^3+1}$$

$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$

Si $u=e^x,\ du=e^x\ dx$

$$\int \frac{du}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2-x+1)}$$

Máximo común divisor $(x+1)(x^2-x+1)$

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Los valores de $x=-1,$

Si $x=-1$

$$1=A(1+1+1) => A=\frac{1}{3}$$

Sustituyendo $A=\frac{1}{3}$ *en* $A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$

Sustituyendo $A = \frac{1}{3}$ *en* $A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$

$\frac{1}{3}(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = 1;$ Desarrollando

$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + Bx^2 + Bx + Cx + C = 1;$ *agrupando términos semejantes*

$\left(\frac{1}{3} + B\right)x^2 + \left(-\frac{1}{3} + B + C\right)x + C + \frac{1}{3} = 1;$ *igualando términos semejantes*

$\left(\frac{1}{3} + B\right) = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$

$C + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{3}$

$$\int \frac{\frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow$$

Si integramos $\int \frac{\frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1}\,dx + \frac{1}{3}\ln(x+1)$

Falta integrar $\int \frac{\frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1}\,dx = \frac{-1}{3}\int \frac{xdx}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1};$

Para integrar $\frac{-1}{3}\int \frac{xdx}{x^2 - x + 1}$ *si* $u = x^2 - x + 1;\ du = (2x - 1)dx$

Utilizando un artificio algebraico

$$\frac{-1}{3}\int \frac{xdx}{x^2 - x + 1} = \frac{-1}{3(2)}\int \frac{2xdx}{x^2 - x + 1} = \frac{-1}{6}\int \frac{(2x - 1 + 1)dx}{x^2 - x + 1}$$

quedando dos integrales nuevamente

$\frac{-1}{6}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x^2 - x + 1}$ *y añadimos que trae consigo* $\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$

$$\int \frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx = \frac{-1}{6}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}-\frac{1}{6}\int \frac{1}{x^2-x+1}\ \textit{y añadimos}$$

$$\textit{que trae consigo}\ \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{3}\ln(x+1)$$

$$\frac{-1}{6}\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{3}{6}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx+\ln(x+1)$$

$$-\frac{1}{6}\int \frac{du}{u}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx+\ln(x+1)$$

$$-\frac{1}{6}\ln u+\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,ang\ \tan\left(\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+\ln(x+1)+C \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\,ang\ \tan\left(\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)+\ln(x+1)+C$$

Integración de Funciones hiperbólicas

Repasando:

1) $\int senh\,u\,du = cosh\,u + C$

2) $\int cosh\,u\,du = senh\,u + C$

3) $\int \tanh u\,du = \ln \cosh u + C$

4) $\int \coth u\,du = \ln|senh\,u| + C$

5) $\int sech^2 u\,du = tanh\,u + C$

6) $\int csch^2 u\, du = -coth\, u + C$

7) $\int -sec\, hu\ \ tan\, hu\, du = sech\, u + C$

8) $\int -csc\, u\, cot\, u\, du = csch\, u + C$

EJERCICIOS

$A)\ \int \frac{sen\, h\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx\ ;\ u = \sqrt{x};\ \ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

$2\int senh\ u\ du = \cos\ hu + C = \underline{\cos h\sqrt{x}\ + C}$

$B)\ \int \cosh^2 2x dx \ => u = 2x,\ du = 2\, dx$

$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cosh\ 2x\right)dx = \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}\int \cosh\ 2x\ dx$

$Si\ \ v = 2x;\ dv = 2du$

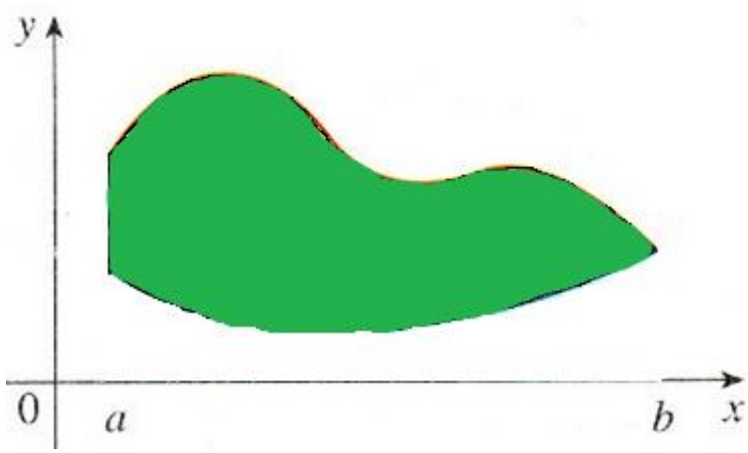
$=> \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}\int \cosh\ 2x\ dx = \frac{2x}{4} + \frac{1}{8}senh\, 4x + C$

$C)\ \int \tan\ h^2 x\ dx = \int (1 - \sec h^2 x)dx = x - \tan\ h\ x$

Se sugieren las siguientes direcciones de Internet para consulta del tema 3:

http://usuarios.lycos.es/juanbeltran/id22.htm
http://galeon.hispavista.com/libierhjhonnyh/productos134205.html
http://usuarios.lycos.es/calculoint21/id44.htm

Área entre curvas



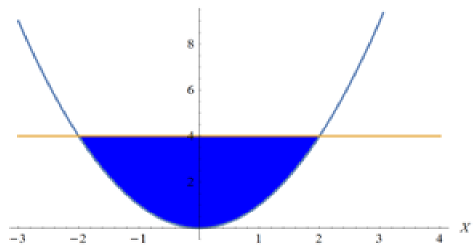
$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

EJEMPLO

Calcular el área de la región comprendida por la curva $y = x^2$ *y la curva* $y = 4$.

Solución:



$x^2 = 4;\ x = -2,\ 2$

rectas verticales limitan

*la región y cor*tan *al eje X*

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\ dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}u^2$$

EJEMPLO

Calcular el área de la región comprendida por la curva $y = x^2 - 2x$ *y la curva* $g(x) = -x^2 + 2x$.

Solución:

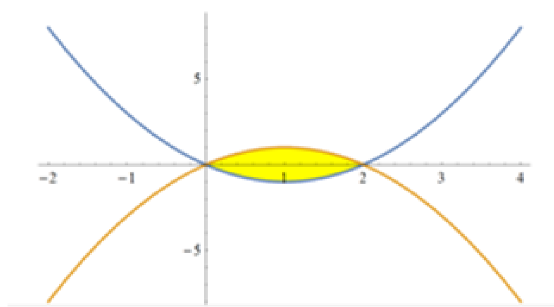
$x^2 - 2x = -x^2 + 2x$

$x^2 + x^2 - 2x - 2x = 0$

$2x^2 - 4x = 0$

$x(2x - 4) = 0$

$x = 0;\ 2x = 4;\ x = \frac{4}{2} = 2$



$$\int_{0}^{2} (-x^2 + 2x) - \left(x^2 - 2x\right) dx = \int -2x^2 + 4x\, dx = -\frac{2x^3}{3} + 2x^2\Big|_{0}^{2} = \frac{8}{3}u^2$$

EJEMPLO

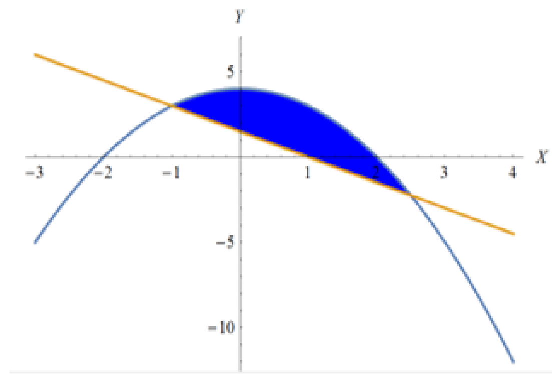
Calcular el área de la región comprendida por la curva

$y = x^2 + 4$ *y la curva* $\frac{3}{2}x + y = \frac{3}{2}$

Solución:

$$y = -x^2 + 4 \ldots (1)$$

$$y = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$$



Igualando

$$-x^2 + 4 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$$

$$-x^2 + \frac{3}{2}x + 4 - \frac{3}{2} = 0$$

$$-x^2 + \frac{3}{2}x + 4 - \frac{3}{2} = 0$$

$$-x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = 0 \quad \textit{Multiplicando por } -2$$

$$2x - 3x - 5 = 0$$

$$(2x - 5)(x + 1) = 0$$

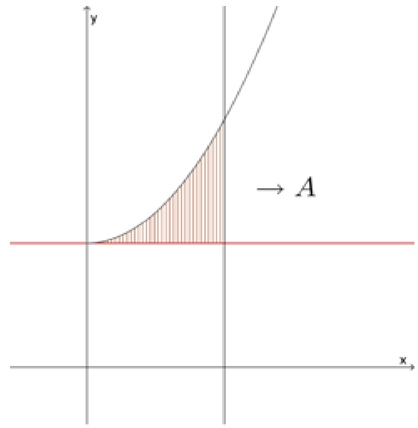
$$\int_{-1}^{\frac{5}{2}} -x^2 + 4 - \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x \Big|_{-1}^{\frac{5}{2}} = \frac{343}{48}u^2$$

EJEMPLO

Calcular el área de la región comprendida por la curva $y = 1$ *y la curva* $y = x^2 + 1$ y la recta de ecuación $x = 1$.

Solución:

$$A = \int_0^1 \left(x^2 + 1\right) - 1 \; dx =$$



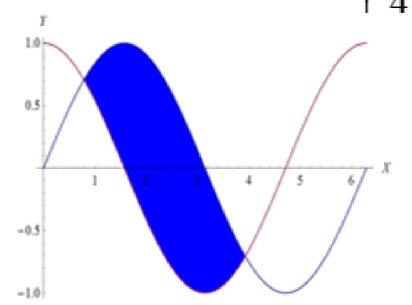
$$\int_0^1 x^2 \, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{3} u^2}$$

EJEMPLO

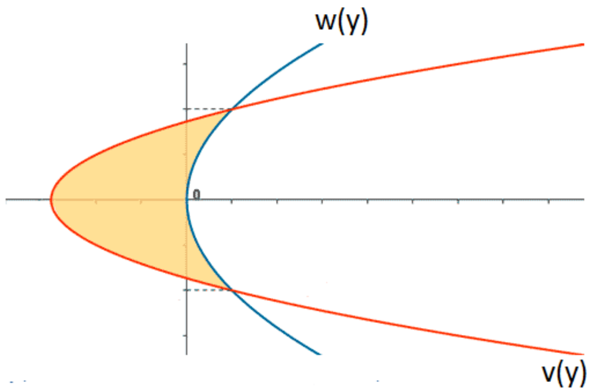
Calcular el área de la región comprendida por la curva

$y = sen\, x$ *y la curva* $y = \cos x$ *en* $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Solución:



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} sen(x) - \cos(x) \; dx = -\cos x - senx \; \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = 2\sqrt{2} \; u^2$$



$$\text{Área} = \int_{y_1}^{y_2} \left[(\text{curva de la derecha}) - (\text{curva de la izquierda})\right] dy$$

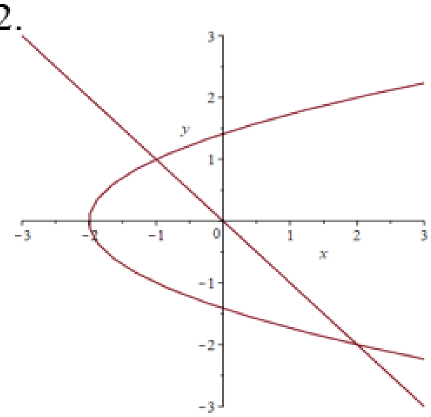
$$S = \int_c^d w(y)\,dy - \int_c^d v(y)\,dy$$

$$A = \int_c^d [w(y) - v(y)]\,dy$$

$$A = \int_c^d v(y)\,dy$$

EJEMPLO

Calcular el área de la región comprendida por la curva $y = -x$ y la curva $x = y^2 - 2$.



Solución:

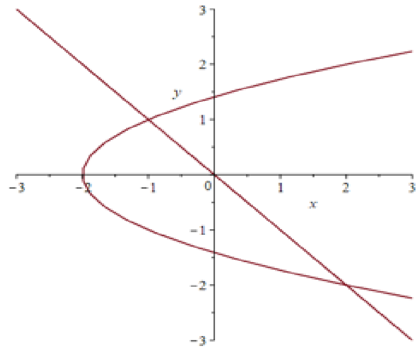
$y = -x;\ x9 = -y$

$x = y^2 - 2$

$-y = y^2 - 2;\ y^2 - 2y - 2 = 0$

$(y+2)(y-1) = 0$

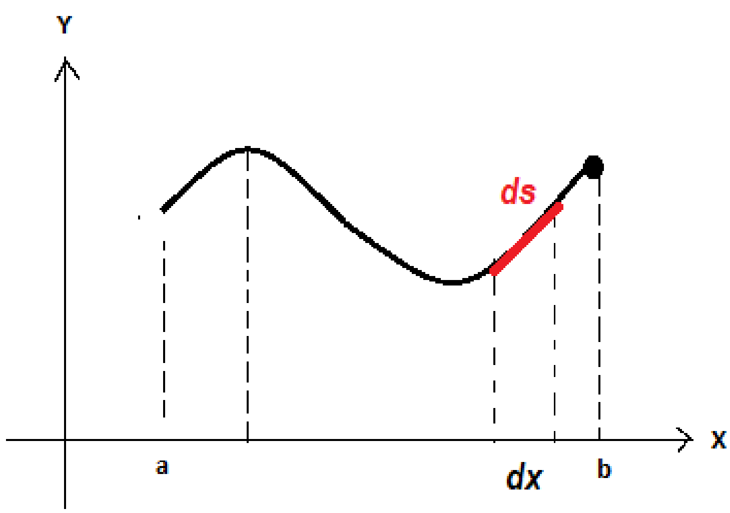
$y = -2,\ y = 1$

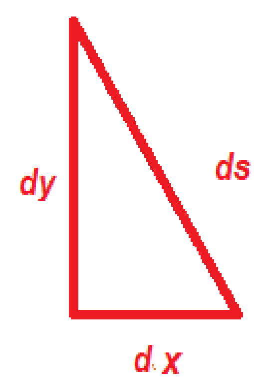


$$\int_{-2}^{1} -y-(y^2-2)dy =$$

$$\int_{-2}^{1} (y^2-y+2)dy = \frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+2y\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}u^2$$

Longitud de arco en coordenadas cartesianas:





$$\sum \Delta l = \sqrt{\ \Delta x^2 + \Delta y^2}$$
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$
$$ds = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$
$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Longitud de arco en coordenadas polares:

x= rcost
y = rsen t

$$L = \int ds$$
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$
$$x = f(\theta)\cos\theta;\ dx = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta) sen\theta d\theta$$
$$y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta;\ dy = f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta) sen\theta d\theta$$

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(f'(\theta)\right)^2 + \left(f(\theta)\right)^2}\, dx$$

Notas
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = ang\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Nota: Se sugiere revisar las notas de curvas polares para cardioides, lemniscatas, rosas de n-pétalos

EJERCICIO

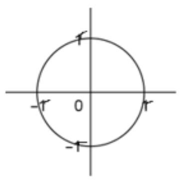
Calcular la longitud de la circunferencia de radio r o perímetro la circunferencia de radio r.

Solución:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2};\ y\ 2 = -\sqrt{r^2 - x^2};$$

Si se obtiene la cuarta parte



$$\frac{L}{4} = \int_0^r \sqrt{1 + [f\,'(x)]^2}\,dx$$

$$f\,'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Solución:

$$[f\,'(x)]^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\frac{L}{4} = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\,dx$$

$$r\ ang\ sen\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_0^r = r\ ang\ sen\left(\frac{r}{r}\right) - r\ ang\ sen\left(\frac{0}{r}\right)$$

$$=> \frac{L}{4} = r\left(\frac{\pi}{2}\right) => L = 4\pi r\ u.\ de\ longitud$$

EJERCICIO

Calcular desde el origen al punto

$y = \ln(\sqrt{2}) \quad de \quad f(x) = \ln(\cos x)$

Solución:

$$y = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad si \ y = \ln(\cos x),\ Evaluamos$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x = \frac{\pi}{4},\ valor\ de\ x$$

$$La\ derivada\ \ f'(x) = \frac{-sen(x)}{\cos(x)} = -\tan x$$

$$[f'(x)]^2 = (-\tan x)^2 = \tan^2 x$$

Calculamos la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2 x}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2 x}\ dx =$$

$$\ln\left|\sec x + \tan x\right|,\ evaluamos\ en\ 0\ y\ \frac{\pi}{4}$$

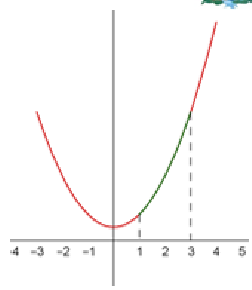
$$\ln\left|\frac{1}{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}} + \tan\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|\frac{1}{\cos(0)} + \tan(0)\right| =$$

$$\ln(\sqrt{2}+1) - 0 = \ln(\sqrt{2}+1)\ u.\ de\ longitud$$

EJERCICIO

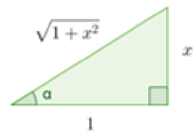
Hallar la longitud de arco de la curva

$Y = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)$ en $1 \le x \le 3$



Solución:

$$\int_1^3 \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^2\right)+1}\ dx \qquad -\int_1^3 \sqrt{x^2+1}\,dx$$



$$\sec\theta = \sqrt{x^2+1} \qquad \tan\theta = x$$

$$\sec^2\theta d\theta = dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}\,x + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)\Big]_1^3$$

$$\int \sec\theta \cdot \sec^2\theta d\theta = \int \sec^3\theta d\theta =$$

$$u = \sec\theta \qquad dv = \sec^2\theta\, d\theta$$

$$du = \sec\theta\tan\theta d\theta \qquad v = \tan\theta$$

$$\int udv = uv - \int vdu = \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta \cdot \sec\theta d\theta$$

$$= \sec\theta\tan\theta - \int\left(\sec^2\theta - 1\right)\sec\theta d\theta$$

$$\int \sec^3\theta d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int\left(\sec^2\theta - \sec\theta\right)d\theta$$

$$2\int \sec^3\theta d\theta = \sec\theta\tan\theta + \ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right| + C$$

$$\int \sec^3\theta d\theta = \frac{1}{2}\left(\sec\theta\tan\theta + \ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right)$$

Sustituyendo $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}\cdot x + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)$

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}\cdot x+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right)\Bigg|_1^3 =$$

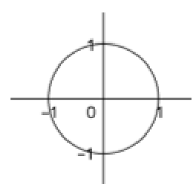
$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{9+1}\cdot(3)+\ln\left|3+\sqrt{10}\right|\right)-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1^2+1}\cdot x+\ln\left|1+\sqrt{2}\right|\right)\Big|$$

EJERCICIO

Hallar el perímetro de la circunferencia de radio 1.

Solución:

Parametrizando



$$x^2+y^2=1$$

$$\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t=1$$

$$\begin{cases} x=\cos(t) \\ y=\operatorname{sen}(t) \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{-\operatorname{sen}(t)^2+\cos t^2}\,dt=\int_0^{2\pi}dt=t\Big]_0^{2\pi}=2\pi$$

EJERCICIO

Calcular la longitud de la curva

$$f : \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = sen^2 t \end{cases} \quad si \ \ t \in \left[\ 0, \ \frac{\pi}{2} \right]$$

Solución:

Una forma: Calculando la ecuación cartesiana

Sumando la ecuación 1 a la ecuación 2

$x + y = \cos^2 \theta + sen^2 \ \theta \ => \ x + y = 1$

Despejando $y = 1 - x$, *su derivada* $y' = -1$

Calculamos la integral

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (-1)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}\, x \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 0$$

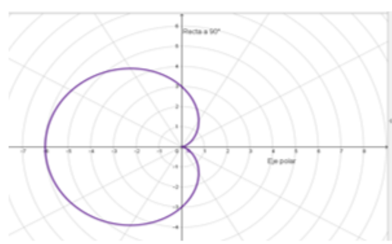
$\sqrt{2}$ *u. de l.*

EJERCICIO

Calcular la longitud de arco de la cardioide de ecuación $r = 3 - 3\cos\theta$

Solución

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(f(\theta)\right)^2 + \left(f'(\theta)\right)^2}\ d\theta$$



Calculamos la mitad ya que es simétrica con respecto al Eje Polar

$$\frac{dr}{d\theta} = 0 - 3(-sen\ \theta)$$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(3 - 3\cos\theta)^2 + (3\operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta =$$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(9-18\cos\theta + 9\cos\theta^2) + (3\operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta =$$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(9-18\cos\theta) + (+9\cos\theta^2 + 9\operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta =$$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(9-18\cos\theta) + 9(\cos\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta =$$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(9-18\cos\theta) + 9(1)}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(18-18\cos\theta)}\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{(18-18\cos\theta)}\, d\theta;\ pero$$

$$sen^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta \quad por\ lo\ que\ sen^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\theta}{2}$$

$$que\ es\ sen^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$entonces\quad 2\,sen^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$$

Sustituyendo

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(18(1-\cos\theta)}\, d\theta;$$

$$L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(18\left(2\,sen^2\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{36}\sqrt{\left(sen^2\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta$$

$$L = 12\int_0^{\pi} \left(sen\ \frac{\theta}{2}\right) d\theta;\ u = \frac{\theta}{2};\ du = \frac{d\theta}{2}$$

$$L = 24\int_0^{\pi} (sen\ u)\, du = -24\cos u = -24\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} =$$

$$L = -24\cos\frac{\pi}{2} + 24\cos\frac{0}{2} = 24\ u.\ de\ l.$$

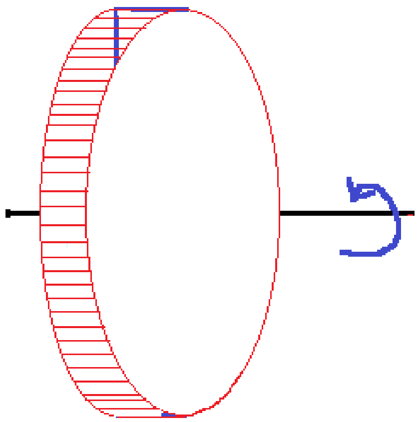
http://dcb.fi-c.unam.mx/Eventos/Foro4/Memorias/Ponencia_55.pdf

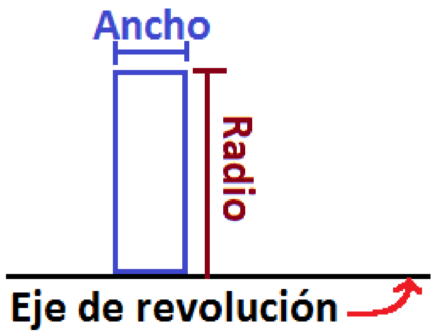
https://es.khanacademy.org/math/integral-calculus/ic-adv-funcs/dc-polar-arc-length/v/polar-arc-length-example

Sólidos de revolución

Un **sólido de revolución** es aquel que se forma al girar una curva alrededor de un eje, este puede ser un eje coordenado o alguno otro representado por una recta.

Método de discos

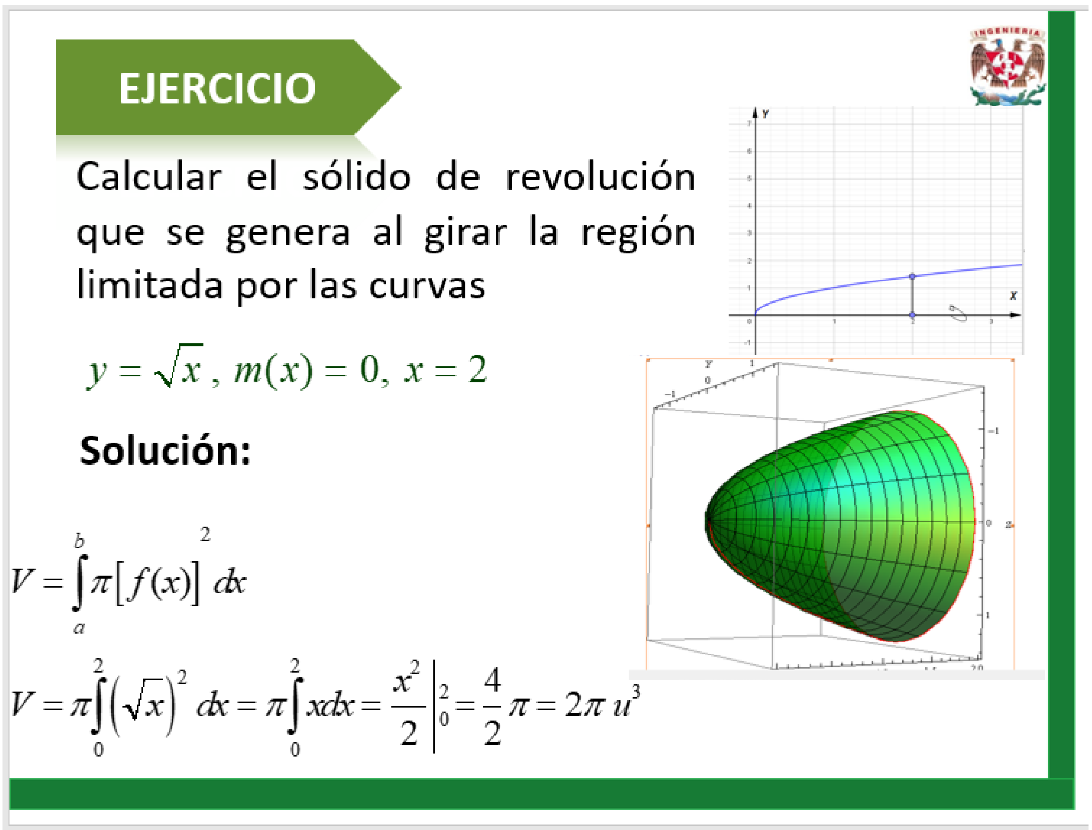




$$V=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi f^{2}(x_i)\Delta x_i=\int_a^b \pi f^{2}(x)dx$$

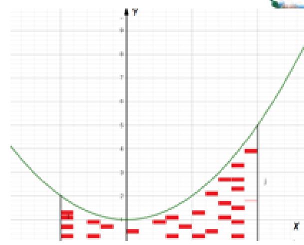
$$V=\pi\int_a^b \left[\ \mathrm{f}\,(x)\right]^2 dx \quad u^3$$

Se sugiere revisar el método de arandelas, método de cascarones.



EJERCICIO

Calcular el sólido de revolución que se genera al girar la región limitada por las curvas



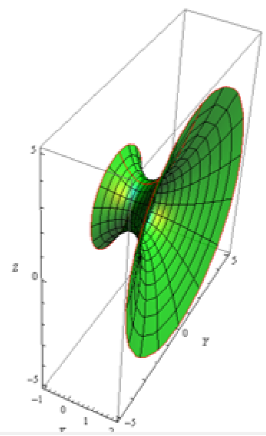
$y = x^2 + 1 \quad , \; y = 0, \; x = -1, \; x = 2$

Solución:

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x) \right]^2 dx$$

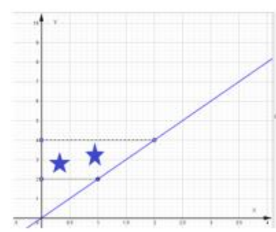
$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left(x^2 + 1 \right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{2} \left(x^4 + 2x^2 + 1 \right) dx =$$

$$\pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^2}{2} + x \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{78}{5} \pi u^3$$



EJERCICIO

Calcular el sólido de revolución de un cono truncado que se hace Girar alrededor de Y, la región limitada por las rectas



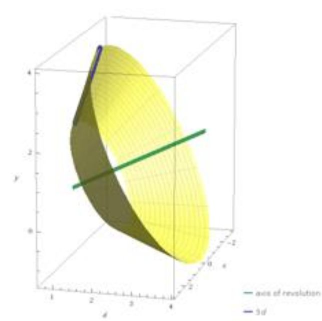
$y = 2x \; , \; y = 2, \; y = 4, \; y \text{ el eje } Y$

Solución:

$$V = \int_a^b \pi \left[f(y) \right]^2 dy \; ; \quad x = \frac{y}{2}$$

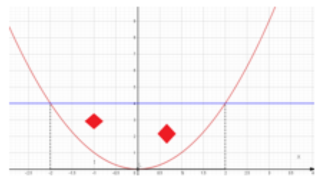
$$V = \pi \int_2^4 \left(\frac{y}{2} \right)^2 dx = \pi \int_2^4 \left(\frac{y^2}{4} \right) dy =$$

$$\pi \left(\frac{y^3}{12} \right) \Bigg|_2^4 = \frac{14}{3} \pi u^3$$



EJERCICIO

Calcular el sólido de revolución que se genera al girar la región limitada por las curvas



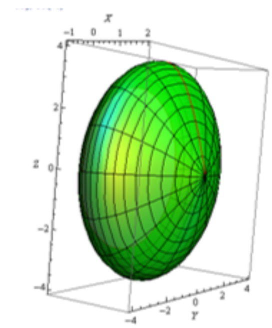
$$y = x^2 \ , \ y = 4, \ x = -2, \ x = 2$$

Solución:

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x) \right]^2 dx$$

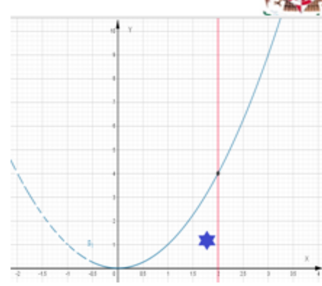
$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx =$$

$$\pi\left(16x + \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{512}{15}\pi u^3$$



EJERCICIO

Calcular el sólido de revolución que se genera al girar alrededor de la recta x=2, la región limitada por x=2, el eje X y la parábola $y = x^2$

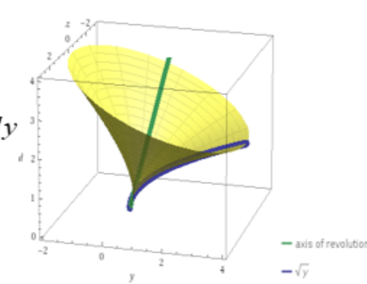


Solución:

$$V = \int_a^b \pi \left[f(y) \right] dy \ ; \quad x = \sqrt{y}$$

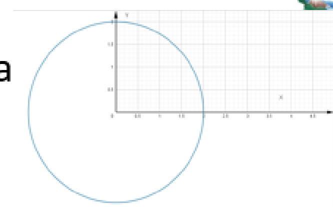
$$V = \pi \int_0^4 \left(2 - \sqrt{y}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 \left(4 - 4\sqrt{y} + y\right) dy$$

$$\pi \left(4y - 4\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)\Bigg|_0^4 = \frac{8}{3}\pi u^3$$



EJERCICIO

Calcular el volumen de una esfera
Con centro en el origen y radio
r = 2



Solución:

$$x^2 + y^2 = 4; \quad y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$V = \int_a^b \pi \left[f(\mathrm{x}) \right]^2 dx \ ;$$

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{4 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_0^4 \left(4 - x^2 \right) \ dx$$

$$\pi \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-2}^{2} = \frac{32}{3} \pi \ u^3$$