

OPERADORES LINEALES EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Adjunto de un operador

Sea V un espacio con producto interno y sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal.

Un operador $T^* : V \rightarrow V$ se dice que es un adjunto de T si se cumple que:

$$(T(\bar{u}) | \bar{v}) = (\bar{u} | T^*(\bar{v})) ; \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$$

Propiedades de operador adjunto

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K , con producto interno. Si S

y T son operadores lineales en V y α es un escalar de K , entonces:

- a) $(T^*)^* = T$
- b) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$
- c) $(S + T)^* = S^* + T^*$
- d) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$
- e) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$

Teorema:

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y con producto interno, entonces para cada operador lineal $T: V \rightarrow V$ existe un único adjunto T^* , que también es lineal.

Demostración:

Por definición: $(T(\bar{u}) | \bar{v}) = (\bar{u} | T^*(\bar{v})) ; \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$

O sea hay un operador adjunto para cada producto interno de un operador lineal.

Nota: Si V es de dimensión finita se puede asegurar la existencia y unicidad del operador adjunto para cada producto interno.

Ej:

Obtener el adjunto del operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = (2x + y, -x + 3y)$$

Con respecto al producto interno en $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\left(\begin{pmatrix} \bar{u} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \bar{v} \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2 ;$$

$$\forall \bar{u} = (x_1, x_2), \bar{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} 2x + y, -x + 3y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a, b \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} x, y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b \end{pmatrix} \\ (2x + y)a - 2(2x + y)b - 2(-x + 3y)a + 5(-x + 3y)b &= \\ x(\alpha a + \beta b) - 2x(\gamma a + \delta b) - 2(y)(\alpha a + \beta b) + 5y(\gamma a + \delta b) &= \\ = 2xa + ya - 4xb - 2yb + 2xa - 6ya - 5xb + 15yb &= \\ \alpha ax + \beta bx - 2\gamma xa - 2\delta bx - 2\alpha ya - 2\beta by + 5\gamma ya + 5\delta by &= \\ 4xa = (\alpha - 2\gamma)xa &= \\ -5ya = (-2\alpha + 5\gamma)ya &= \\ -9xb = (\beta - 2\delta)xb &= \\ 13yb = (-2\beta + 5\delta)yb &= \\ \alpha = 10, \beta = -19, \gamma = 3, \delta = -5 &= \end{aligned}$$

$$T^*(x, y) = (10x - 19y, 3x - 5y)$$

Ej:

Obtener el adjunto del operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$T(x, y) = (2x, x + y)$$

Con respecto al producto interno usual.

$$T^* (x, y) = (2x + y, y)$$

OPERADOR NORMAL

Sea $T: V \rightarrow V$ un operador lineal en un espacio con producto interno. Si B es una base ortonormal de V entonces

$$M_B^B(T^*) = \left(M_B^B(T) \right)^*$$

Ej: Determinar si $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + 2y, 2x + 3y)$ es un operador normal en $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual.

Teorema:

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea B una base ortonormal de V . Si $T: V \rightarrow V$ es un operador lineal, entonces:

$$M_B^B(T^*) = \left(M_B^B(T) \right)^*$$

Para la obtención de la regla de correspondencia, es importante considerar una base ortonormal, obtener la matriz asociada con respecto a la base ortonormal y Utilizar el teorema

$$M_B^B(T^*)(\bar{v})_B = \left[T^*(\bar{v}) \right]_B$$

Consultar boletín 262 de Matemáticas y Cultura

OPERADOR NORMAL

Sea V un espacio con producto interno y sea $T:V \rightarrow V$ un operador lineal. Se dice que T es normal si $T^* \circ T = T \circ T^*$

De la definición anterior se sigue de inmediato que si T es normal, entonces T^* también es normal y viceversa.

Ejemplo: $K(x, y) = (2x - y, x + 5y)$

Determinar el autoadjunto del operador, y verificar si K es un operador Normal con K^*

Los operadores normales tienen las siguientes propiedades.

Teorema:

1. $\|T(\bar{v})\| = \|T^*(\bar{v})\| \quad \forall v \in V$
2. Si $T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ entonces $T^*(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$
3. Si $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son vectores característicos de T correspondientes a valores característicos distintos, entonces los vectores $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son ortogonales, es decir $(\bar{v}_1 | \bar{v}_2) = 0$.

TIPOS DE OPERADORES

HERMITIANOS

Definición:

Sea V un espacio con producto interno, y sea $T:V \rightarrow V$ un operador lineal, se dice que T es hermitiano si

$$(T(\bar{v}) | \bar{w}) = (\bar{v} | T(\bar{w})); \quad \forall \bar{w}, \bar{v} \in V$$

Se dice que T es antihermitiano si

$$(T(\bar{v}) | \bar{w}) = -(\bar{v} | T(\bar{w})); \quad \forall \bar{w}, \bar{v} \in V$$

Si V está definido sobre el campo real, entonces a un operador hermitiano se le llama simétrico y a un operador antihermitiano se le llama también antisimétrico

Ej:

Determinar si los siguientes operadores son hermitianos

- a) $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $T(z_1, z_2) = (iz_2, -iz_1)$ donde $\mathbb{C}^2$ está definido sobre $\mathbb{C}$ con el producto escalar complejo como producto interno.

$$(\bar{z} | \bar{w}) = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 \quad \forall \bar{z} = (z_1, z_2), \bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$$

- b) Si $T: F \rightarrow F$, donde F es el espacio de funciones reales continuas, definido por $S[f(t)] = f(t) - f(-t) \quad \forall f(t) \in F$, con el producto interno

$$(f | g) = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt \text{ sobre el campo real.}$$

Resolución:

- a) $\bar{z} = (z_1, z_2), \bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$

La condición a cumplir es:

$$(T(\bar{z}) | \bar{w}) = ((iz_2, -iz_1) | \bar{w}) = iz_2 \bar{w}_1 - iz_1 \bar{w}_2 \dots (1)$$

Por el otro lado

$$(\bar{z} | T(\bar{w})) = (\bar{z} | i\bar{w}_2, -i\bar{w}_1) = z_1 \overline{i\bar{w}_2} + z_2 \overline{-i\bar{w}_1} = -iz_1 \bar{w}_2 + iz_2 \bar{w}_1 \dots (2)$$

Como (1) =(2) entonces T es hermitiano. También es unitario.

- b) S será hermitiano si

$$(S(f(t)) | g(t)) = (f(t) | S(g(t)))$$

Por un lado

$$\left(S(f(t)) \mid g(t) \right) = \left(f(t) - f(-t) \mid g(t) \right) = \int_{-1}^1 [f(t)]g(t) dt - \int_{-1}^1 [f(-t)]g(t) dt \dots(1)$$

Por otro lado

$$\left(f(t) \mid S(g(t)) \right) = \left(f(t) \mid g(t) - g(-t) \right) = \int_{-1}^1 [f(t)][(g(t)) - g(-t)] dt = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt - \int_{-1}^1 f(t)g(-t) dt \dots(2)$$

Pero si $t = \delta$, cuando $\delta = 1 \Rightarrow t = -1$, cuando $\delta = -1$, $t = 1$, $dt = -d\delta$,
por tanto

$$\int_{-1}^1 [f(\delta)g(-\delta)]d\delta = - \int_{-1}^1 [f(-t)g(t)]dt \dots(3)$$

Como (1) = (3)

S es hermitiano o simétrico.

Teorema:

- 1) La matriz asociada a un operador hermitiano (simétrico) referida a una base ortonormal es una matriz hermitiana (simétrica).
- 2) La matriz asociada a un operador antihermitiano (antisimétrico) referida a una base ortonormal es una matriz antihermitiana (antisimétrica).

Ejemplo:

Determinar si los siguientes operadores definidos en R^2 son simétricos, considerando el producto interno usual.

- a) $T(x, y) = (x + 2y, 2x + 3y)$
- b) $S(x, y) = (17x - 4y, -2x + 10y)$

Solución:

Dado que en ambos casos el producto es usual, se utiliza la base canónica de R^2 la cual ya es ortonormal.

$$a) M_E^E(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ que es simétrica, por lo tanto, } T \text{ es un operador simétrico.}$$

b) $M_E^E(S) = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ no es simétrica, por lo tanto S no es un operador simétrico.

Sin embargo, para el producto interno

$(\bar{x}, \bar{y}) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 17x_2y_2$ el operador S sí es simétrico.

Un operador puede ser hermitiano para un producto interno y puede no serlo para otro.

Sin embargo, es suficiente que un operador sea hermitiano para algún producto interno para llamarlo así.

Existen operadores que no son hermitianos o antihermitianos para ningún producto interno.

Teorema:

Sea T un operador lineal y λ un valor característico de T.

- 1) Si T es hermitiano entonces λ es real.
- 2) Si T es antihermitiano, entonces λ es imaginario.

De este teorema se concluye que un operador hermitiano (antihermitiano) sus valores característicos son siempre números reales (números imaginarios). Lo contrario no siempre es cierto, es decir, que un operador lineal tenga todos sus valores característicos reales (imaginarios) no implica que sea hermitiano o antihermitiano.

Demostración:

- 1) Si T es hermitiano entonces λ es real.

Sea $\bar{v}$ un vector característico asociado al valor característico λ del operador hermitiano T. Como T es hermitiano:

$$\begin{aligned} (\lambda \bar{v} | \bar{v}) &= (\bar{v} | T(\bar{v})) \\ \lambda (\bar{v} | \bar{v}) &= \bar{\lambda} (\bar{v} | \bar{v}) \text{ Como } \bar{v} \neq 0; (\bar{v} | \bar{v}) \neq 0 \\ \lambda &= \bar{\lambda}, \lambda \text{ es real.} \end{aligned}$$

Teorema: Los valores característicos asociados a valores distintos de un operador hermitiano o antihermitiano, son ortogonales.

OPERADORES UNITARIOS

Definición: Sea V un espacio con producto interno, al operador $T:V \rightarrow V$ se le llama unitario si

$$(T(\bar{v}) | T(\bar{w})) = (\bar{v} | \bar{w}); \quad \forall \bar{w}, \bar{v} \in V$$

Cuando el espacio V está definido sobre el campo real, al operador T se le llama operador ortogonal.

Ejemplo: Determinar si el operador $T(x, y) = \frac{1}{13}(5x - 12y, 12x + 5y)$ es ortogonal considerando al producto interno usual.

Solución:

$$\begin{aligned}(T(\bar{x}) | T(\bar{y})) &= \frac{1}{13}(5x_1 - 12x_2, 12x_1 + 5x_2) | \frac{1}{13}(5y_1 - 12y_2, 12y_1 + 5y_2); \\&= \frac{1}{169}(25x_1y_1 - 60x_1y_2 - 60x_2y_1 + 144x_2y_2) + \frac{1}{169}(144x_1y_1 + 60x_1y_2 + 60x_2y_1 + 25x_2y_2) = \\&= \frac{1}{169}(169x_1y_1 + 169x_2y_2) = (x_1y_1 + x_2y_2) = (\bar{x} | \bar{y})\end{aligned}$$

T es ortogonal.

Teorema

Sea $T:V \rightarrow V$ un operador unitario.

Para todo $\bar{x}, \bar{y} \in V$

- 1) Si $(\bar{x} | \bar{y}) = 0$ entonces $(T(\bar{x}) | T(\bar{y})) = 0$
- 2) $\|T(\bar{x})\| = \|\bar{x}\|$
- 3) $\|T(\bar{x}) - T(\bar{y})\| = \|\bar{x} - \bar{y}\|$
- 4) T es invertible, T^{-1} es unitario.

Teorema

Sea $T:V \rightarrow V$ un operador unitario

- 1) Si T tiene un valor característico λ , entonces $|\lambda| = 1$
- 2) Si $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos, entonces $\bar{x}$ e $\bar{y}$ son ortogonales.
- 3) La matriz asociada a T referida a una base ortonormal es una matriz unitaria (ortogonal en el caso real).

En el ejemplo anterior, la matriz asociada a la base canónica, es una base ortonormal, es:

$M(T) = \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$, es una matriz ortogonal : $M^{-1} = M^T$ es una matriz unitaria.

Operador proyección:

Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal en un espacio V con producto interno y sea W un subespacio de V . El operador $P : V \rightarrow W$ tal que $P(\bar{v}) = \text{proy}_W \bar{v}$ es el operador proyección y es un operador lineal.

Teorema espectral.

Sea T un operador hermitiano sobre el campo real o complejo, o un operador antihermitiano sobre el campo complejo, entonces T es diagonalizable. Además, si la base a la cual está referida la matriz diagonal es ortonormal, entonces la matriz diagonalizadora es unitaria (ortogonal, cuando el campo es real).

Sea T un operador unitario definido sobre el campo complejo, entonces T es diagonalizable. Además, si la base a la cual está referida la matriz diagonal es ortonormal, entonces su matriz diagonalizadora es unitaria (ortogonal en el caso real).

Es importante hacer notar que no todos los operadores ortogonales son diagonalizables, pero cualquier operador unitario definido sobre el campo complejo si es diagonalizable.

Sea $T : V \rightarrow V$ un operador lineal normal y $P_1, P_2, \dots, P_n$ operadores de proyección sobre los espacios característicos de T se cumple:

$$1) T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \dots + \lambda_n P_n \text{ donde}$$

$$2) P_1 + P_2 + \dots + P_n = I$$

$$3) P_1 \circ P_2 = 0$$

Ejemplo: Determinar la descomposición espectral del operador simétrico

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$a) T(x, y) = (7x + 2y, 2x + 4y)$$

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 24; \lambda_1 = 8, \lambda_2 = 3.$$

$$\text{Para } \lambda_1 = 8; \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(8) = \{(2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Para } \lambda_2 = 3; \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(2) = \{(x, -2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$P_1(x, y) = \frac{((x, y) | (2, 1))}{((2, 1) | (2, 1))} (2, 1) = \left(\frac{4x + 2y}{5}, \frac{2x + y}{5} \right)$$

$$P_2(x, y) = \frac{((x, y) | (1, -2))}{((1, -2) | (1, -2))} (1, -2) = \left(\frac{x - 2y}{5}, \frac{-2x + 4y}{5} \right)$$

$$T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$$

$$T = 8 \left(\frac{4x + 2y}{5}, \frac{2x + y}{5} \right) + 3 \left(\frac{x - 2y}{5}, \frac{-2x + 4y}{5} \right)$$

$$T(x, y) = (7x + 2y, 2x + 4y)$$

$$b) T(x, y) = (x - 4y, -4x - 5y)$$

Verificar el teorema espectral para el operador hermitiano

$T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por $T(z_1, z_2) = (-iz_2, iz_1)$ en el cual está dado el producto escalar complejo como producto interno.

Solución. Una base ortonormal es la base canónica $B = \{ i, j \}$.

$$M_B^B(T) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0; \lambda = \pm 1$$

Como $\dim \mathbb{C}^2 = 2$ (sobre el campo $\mathbb{C}$) y los valores característicos son distintos, entonces T es diagonalizable, lo cual verifica una parte del Teorema.

Para $\lambda = 1$, se forma el sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \vec{0}; z_1 + iz_2 = 0, \text{ si } z_2 = k, z_1 = -ik$$

$$E(1) = \{ (-ik, k) \mid k \in \mathbb{C} \}$$

Para $\lambda_2 = -1$, se forma el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \vec{0}; z_1 - iz_2 = 0, \text{ si } z_2 = k \Rightarrow z_1 = ik$$

$$E(-1) = \{ (ik, k) \mid k \in \mathbb{C} \}$$

Se forma una base escogiendo un vector de cada espacio, por ejemplo, $\{ (-i, 1), (i, 1) \}$ que es ortogonal. La norma de ambos vectores es $\sqrt{2}$, entonces una base ortonormal es

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1) \right\}$$

La matriz asociada a B' , $M_{B'}^{B'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, es la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ su matriz diagonalizadora es}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La cual debe ser unitaria

$$P^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \det P = -i \therefore P^{-1} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = P^*$$

Aplicación a las formas cuádras:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$$

$$(x, y) \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + \frac{B}{2}y & \frac{B}{2}x + Cy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$Ax^2 + \frac{B}{2}xy + \frac{B}{2}xy + Cy^2$$

$x^T A x = 1$; A siempre es diagonalizable.

A es similar a una matriz diagonal D

$$A = P^{-1}DP$$

Sustituyendo $x^T P^{-1}DPx = 1$, P es ortogonal.

$x^T P^T DPx = 1$, $(Px)^T D(Px) = 1$, como P es una matriz de transición se obtiene el vector de coordenadas de x pero en la base de los vectores propios.

$$v^T Dv = 1$$

$$(x', y') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$$

Ejemplo:

Identificar la curva $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$