Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
Anexo de Ingeniería
División de Ciencias Básicas
Departamento de Cálculo

Curso de: Cálculo y Geometría Analítica
“Primer semestre”

Presentación mediante PowerPoint

Desarrolló: Prof. Ing. Gregorio Ríos Vilchis.
Revisó: Profa. M.I. María Sara Valentina Sánchez Salinas.
Aprobó: Profa. M.I. María del Rocío Ávila Núñez.

1. C Ó N I C A S

OBJETIVO: EL ALUMNO REAFIRMARÁ LOS CONOCIMIENTOS DE LAS SECCIONES CÓNICAS.

Bibliografía**: Antecedentes de Geometría Analítica.**
Ing. Rodolfo Solís Ubaldo.
Ing. Jesús Patiño Ramírez.
Ing. José A. Ceballos Soberanis.
Ing. Armando Guerrero Soto.
Ing. Felipe Oregel Sánchez.
Ing. Enrique tort y Nuncio.

C O N T E N I D O

1.1 Definición de sección cónica.

1.1. 1 Clasificación de las cónicas.

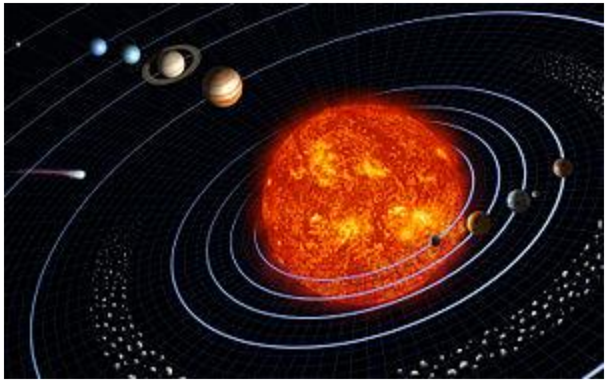
1.2 Ecuación general de las cónicas.

1.3 Identificación de los tipos de cónicas a partir de los coeficientes de la ecuación general y del indicador **I = B2 - 4AC**.

1.4 Ecuaciones de las cónicas en forma ordinaria.

1.5 Rotación de ejes.

FORMAS FÍSICAS DE LAS CÓNICAS

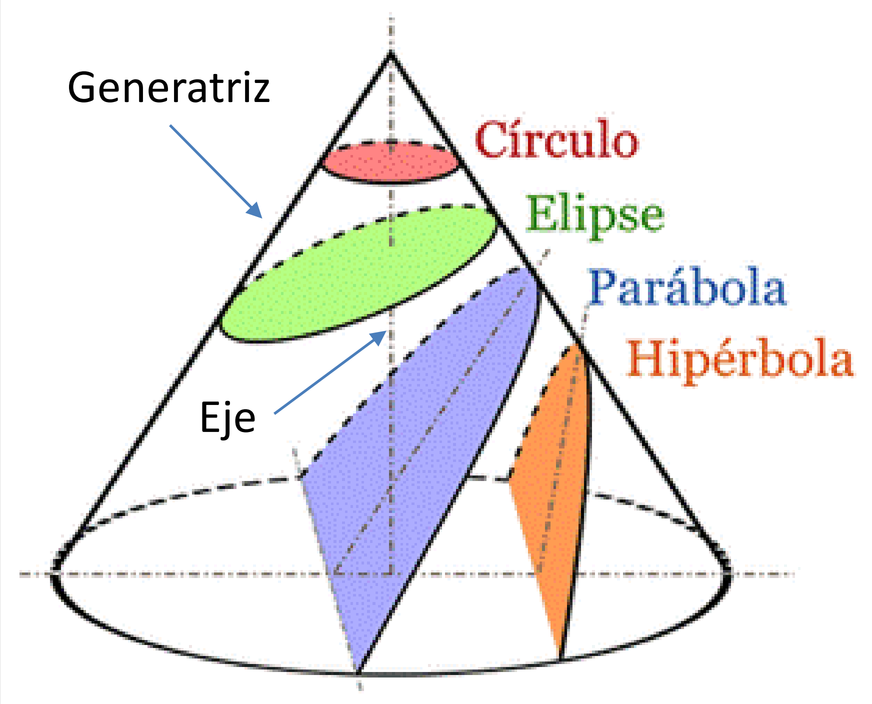




La geometría analítica se ocupa principalmente de determinar las características de un lugar geométrico cuando se conoce su representación analítica o de determinar la representación analítica de un lugar geométrico cuando se conocen sus características.

SECCIONES CÓNICAS

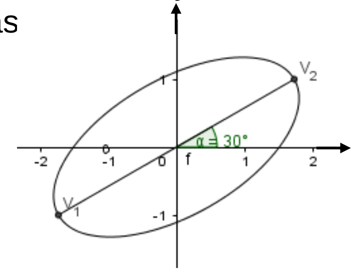
Definición: Son secciones cónicas (o simplemente cónicas) las curvas que resultan de las intersecciones de planos con el cono, sin pasar por el vértice de este último. Los ángulos que forman los planos con el eje o con la generatriz del cono determinan las distintas clases de cónicas. Se clasifican en cuatro tipos: círculo, elipse, parábola e hipérbola (Apolonio de Pérgamo 262-190 a. C.).



Ecuación cartesiana general de segundo grado de las cónicas.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si B ≠ 0, los ejes de las cónicas no son paralelos ni coincidentes con los ejes coordenados, o sea, son las rotadas



Si B = 0, los ejes de las cónicas son paralelos o coincidentes con los ejes coordenados.

INDICADOR O DISCRIMINANTE

$$I = B^2 - 4AC$$

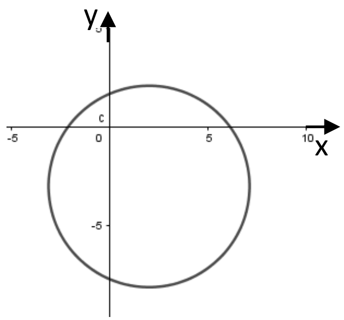
Si **I < 0** la ecuación representa un tipo de **elipse** (un punto o ningún lugar geométrico).

Si **I = 0** la ecuación representa un tipo de **parábola** (dos rectas paralelas, dos rectas coincidentes o ningún lugar geométrico).

Si **I > 0** la ecuación representa un tipo de **hipérbola** (dos rectas que se interceptan en un punto).

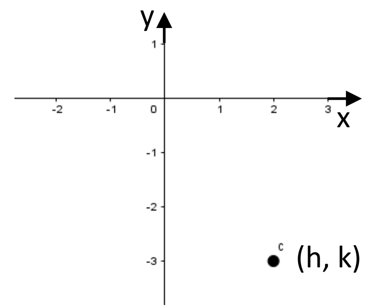
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si **$A \neq 0$, $C \neq 0$** y $A = C$ y del mismo signo la ecuación representa una **circunferencia**, un punto o ningún lugar geométrico.



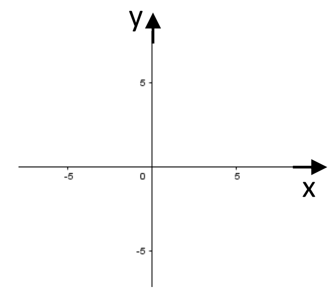
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 13 = 0$$

$r^2 > 0$ o’ $N > 0$



$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$$

$r^2 = 0$ o’ $N = 0$

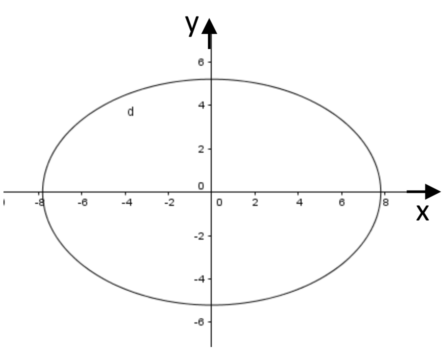


$$x^2 + y^2 + 8x - y + 20 = 0$$

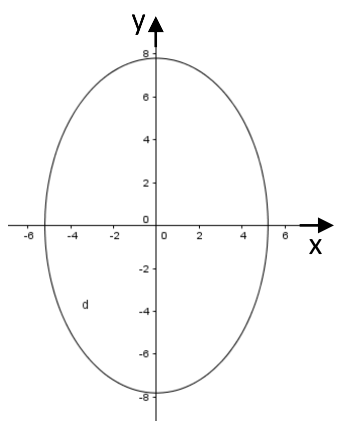
$r^2 < 0$ o’ $N < 0$

Donde $N = D^2 + E^2 - 4F$

Si **$A \neq 0$, $C \neq 0$,** $A \neq C$ y del mismo signo, la ecuación representa una **elipse**, un punto o ningún lugar geométrico.

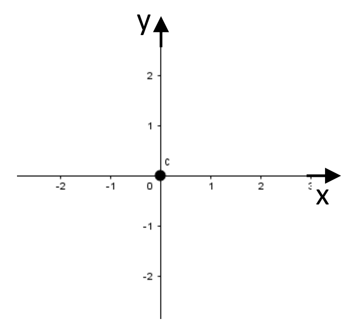


$$4x^2 + 9y^2 - 244 = 0$$



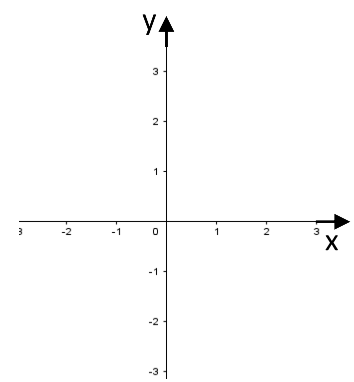
$$9x^2 + 4y^2 - 244 = 0$$

$I < 0$ o’ $N > 0$



$$9x^2 + 4y^2 = 0$$

$N = 0$



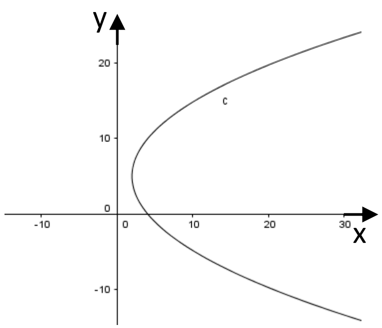
$$9x^2 + 4y^2 + 244 = 0$$

$N < 0$

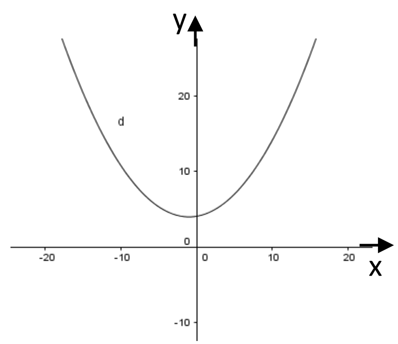
Donde $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

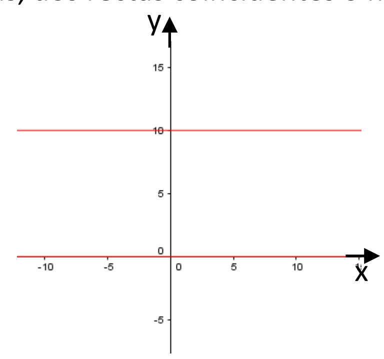
Si **A = 0 ó C = 0** la ecuación representa una **parábola**, dos rectas paralelas, dos rectas coincidentes o ningún lugar geométrico.



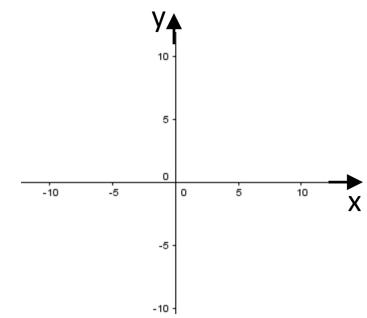
$y^2 - 12x - 10y + 49 = 0$



$x^2 + 2x - 12y + 49 = 0$



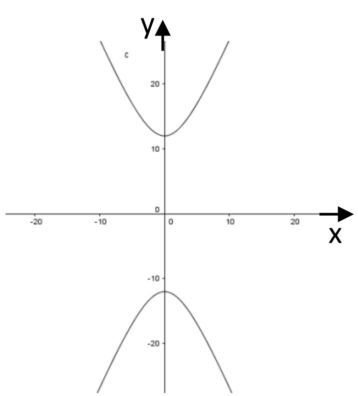
$y^2 - 10y = 0$



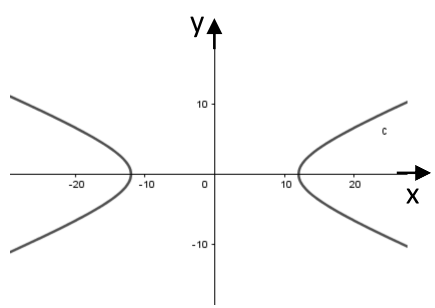
$y^2 - 10y + 49 = 0$

I = 0

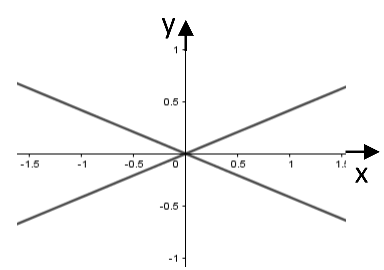
Si **A ≠ 0, C ≠ 0**, A ≠ C y de signo diferente, la ecuación representa una **hipérbola**, dos rectas que se intersectan en un punto, un punto o ningún lugar geométrico.



$25y^2 - 144x^2 - 3600 = 0$



$-144y^2 + 25x^2 - 3600 = 0$



$-144y^2 + 25x^2 = 0$

Donde $N = CD^2 + AE^2 - 4ACF$

I > 0 o' N ≠ 0

N = 0

EJEMPLOS

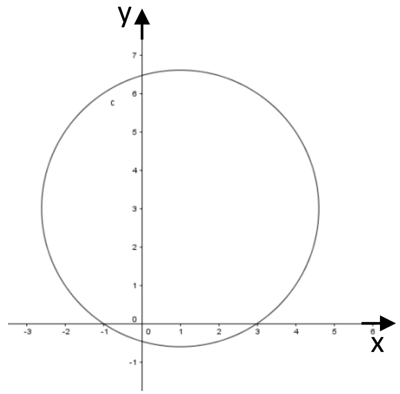
Cada una de las siguientes ecuaciones representa una cónica; determinar de que tipo de cónica se trata.

a) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$

Si A = 1, C = 1 y A = C y del mismo signo, entonces la ecuación representa un tipo de **circunferencia**, de igual forma si:

$N = (-2)^2 + (-6)^2 - 4(-3) = 52 > 0$

Es tipo c**ircunferencia.**

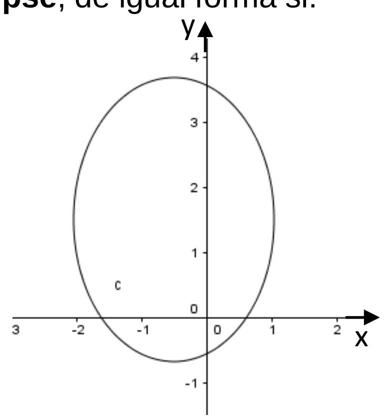


b) $2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0$

Si A = 2, C = 1 y A $\neq$ C y del mismo signo, entonces la ecuación representa un tipo de **elipse**, de igual forma si:

I $= 0 - 4(2)(1) = -8 < 0$

Es tipo elipse.

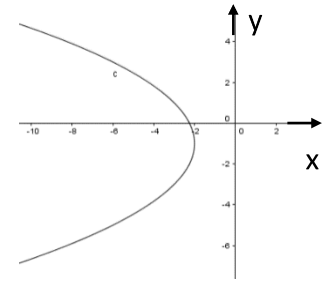


c) $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$

Si A = 0, C = 1 y A $\neq$ C y del mismo signo, entonces la ecuación representa un tipo de **parábola**, de igual forma si:

I $= 0 - 4(0)(1) = 0$

Es tipo p**arábola**.

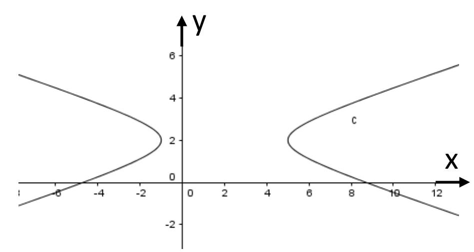


d) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$

Si A = 1, C = - 9 y A $\neq$ C y de signos contrarios, entonces la ecuación representa un tipo de a **hipérbola**, de igual forma si:

I $= 0 - 4(1)(-9) = 36 > 0$

Es tipo Hipérbola.



Resolver los siguientes ejercicios.

a) $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$

b) $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$

c) $x^2 - 6y + 5y - 11 = 0$

d) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$

e) $4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 47 = 0$

LA CIRCUNFERENCIA

1.- Dada la siguiente ecuación de segundo grado, determinar si se trata de una circunferencia y en su caso graficarla.

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Solución.

Partiendo de **$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$**

$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = -4, \quad E = 6 \quad$ y $\quad F = -12$

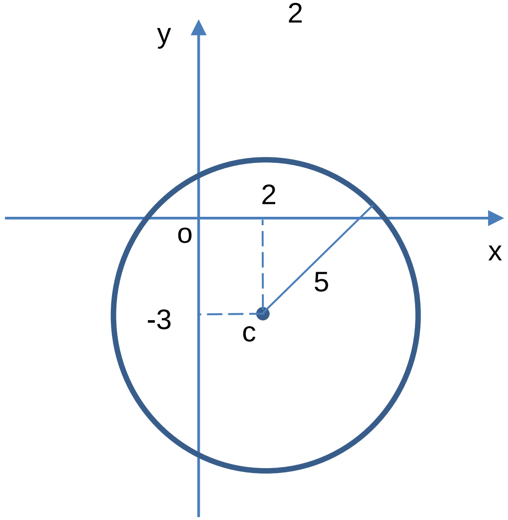
Como $A = C$, del mismo signo y $N = D^2 + E^2 - 4F > 0$

$N = -4 + 6 - 4(-12) = 100 > 0$ resulta una circunferencia.

- Con $C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

Sustituyendo

$C\left(-\left(\frac{-4}{2}\right), -\left(\frac{6}{2}\right)\right) = (2, -3)$ $\qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{-4^2 + 6^2 - 4(-12)} = 5$



GRV1

2.- Dada la siguiente ecuación de segundo grado, determinar si se trata de una circunferencia y en su caso graficarla.

$x^2 + y^2 - 9 = 0$

Solución.

Partiendo de **$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$**

$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0, \quad E = 0 \quad$ y $\quad F = -9$

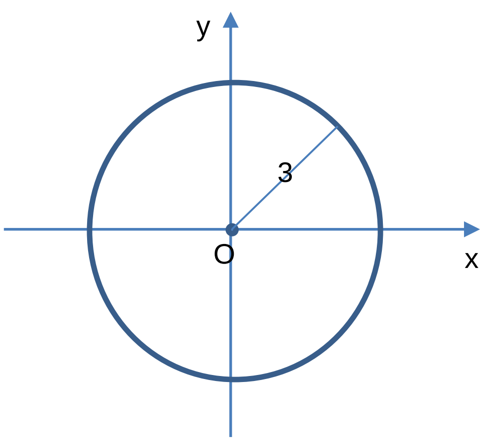
Como $A = C$, del mismo signo y $N = D^2 + E^2 - 4F > 0$

$N = 0 + 0 - 4(-9) = 36 > 0$ resulta una circunferencia.

- Con $C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

Sustituyendo

$C\left(-\frac{0}{2}, -\frac{0}{2}\right) = (0, 0)$ $\qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 - 4(-9)} = 3$



LA CIRCUNFERENCIA

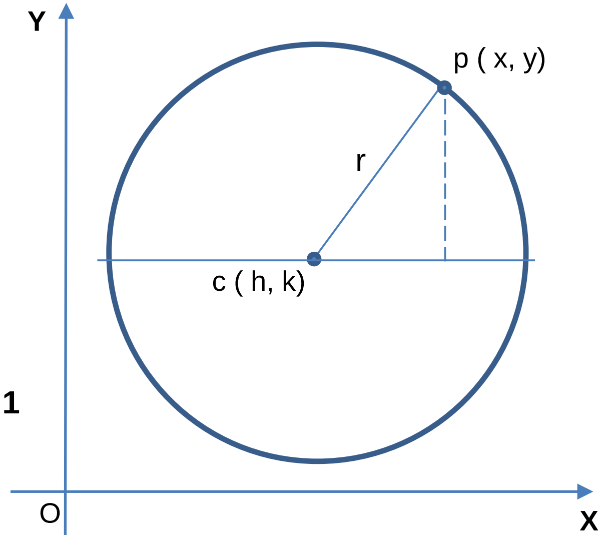


Fig. 1

De la Fig. 1 sustituyendo valores en el teorema de Pitágoras.

$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ Teorema de Pitágoras.

$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$ Ecuación del circulo con centro en un punto.

Con valores al azar $r = 1$; $h = 1$; $k = 1$ y desarrollando.

$1^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$

$1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$ Ordenando

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 + 1 - 1 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ Ecuación general de la circunferencia

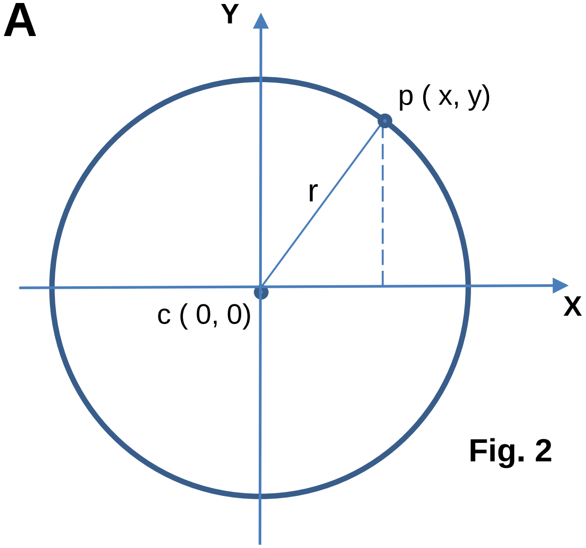


Fig. 2

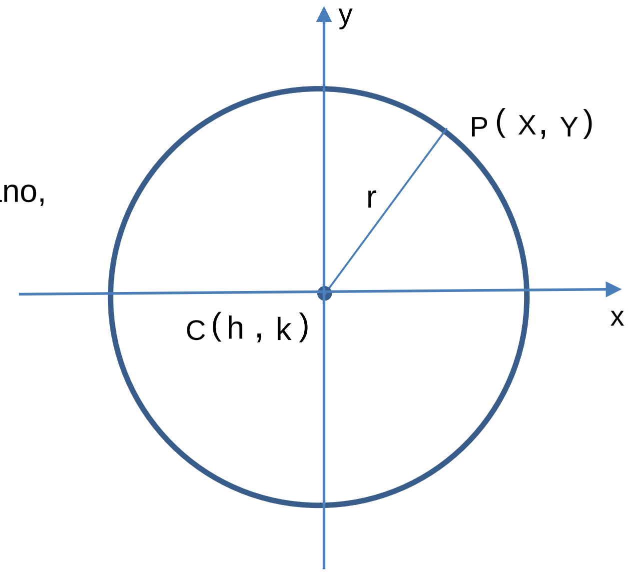
De la fig. 2 sustituyendo valores en la ecuación del circulo:

$r^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$

$r^2 = x^2 + y^2$ Ecuación del circulo con centro en el origen.

LA CIRCUNFERENCIA

CONDICIÓN GEOMÉTRICA Y REPRESENTACIÓN ANALÍTICA



Definición
Una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos contenidos en un plano, que equidistan de un punto fijo **C** llamado centro.

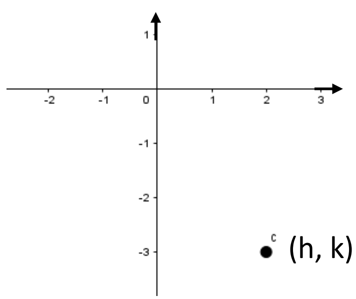
Centro en el origen (0, 0) $X^2 + Y^2 = r^2$

Centro en un punto (h, k) $(X - h)^2 + (Y - k)^2 = r^2$

ECUACIÓN GENERAL $A X^2 + C Y^2 + D X + E Y + F = 0$ Donde A = C

Circunferencia Real Si $N = D^2 + E^2 - 4F > 0$ ∴ Con $C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2} \right)$ y $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

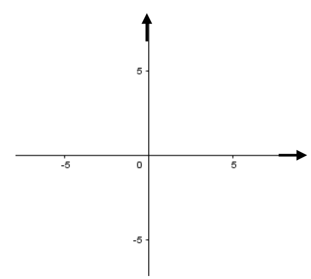
Un punto



$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

$r^2 = 0$

Ningún lugar geométrico



$x^2 + y^2 + 8x - y + 20 = 0$

$r^2 < 0$

Ejemplo

Dada la ecuación general $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$, determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia y graficar.

Ordenando.

$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 12 = 0$ Completando cuadrado en "x" y "y

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 12 - 4 - 9 = 0$ Factorizando.

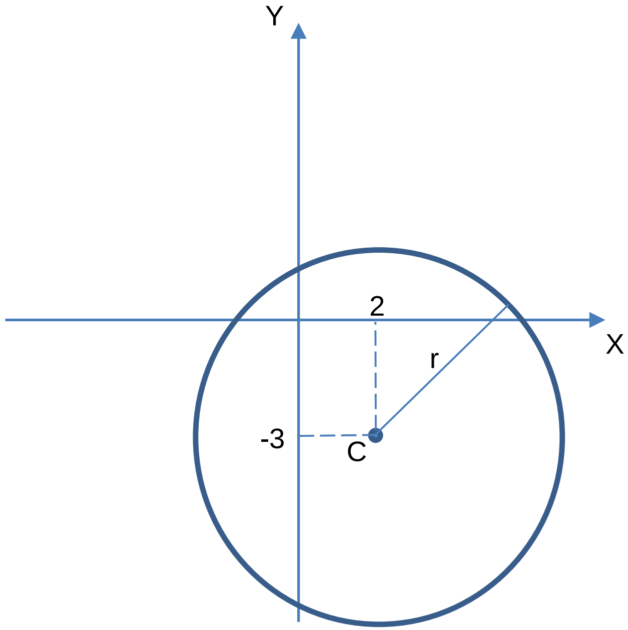
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 - 25 = 0$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$

C (2 , -3)

r = 5



Ejemplo

Dada la ecuación general $x^2 + y^2 + x - (5/2)y - 19/16 = 0$, determinar la ecuación ordinaria de la circunferencia y graficar.

Ordenando.

$x^2 + x + y^2 - (5/2)y - 19/16 = 0$

Completando cuadrado.

$x^2 + x + 1/4 + y^2 - 5/2y + 25/16 - 1/4 - 25/16 - 19/16 = 0$

Factorizando.

$(x + 1/2)^2 + (y - 5/4)^2 - (4 + 25 + 19)/16 = 0$

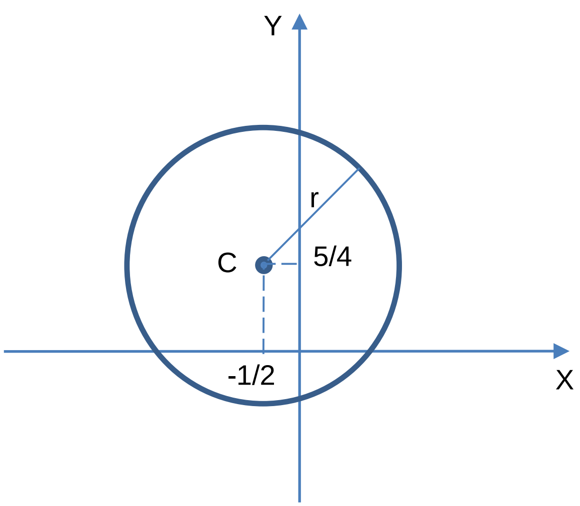
$(x + 1/2)^2 + (y - 5/4)^2 - 3 = 0$

$(x + 1/2)^2 + (y - 5/4)^2 = 3$

$(x + 1/2)^2 + (y - 5/4)^2 = (\sqrt{3})^2$

C (-1/2 , 5/4)

$r = \sqrt{3}$



Determinar la ecuación general de la circunferencia mediante:

a.- El centro C(2, - 3) y el radio $r = 5$.

Sustituyendo en la ecuación ordinaria de la circunferencia.

$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 5^2$ desarrollando

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + 9 – 25 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ (Forma general de la circunferencia)

b.- Mediante formulas.

$A = 1$

$C = 1$

$D = - 2h = - 2 (2) = - 4$

$E = - 2k = -2 (-3) = 6$

$F = h^2 + k^2 - r^2 = 2^2 + (-3)^2 - 5^2 = 4 + 9 - 25 = -12$

Sustituyendo en fórmula general

$A x^2 + C y^2 + D x + E y + F = 0$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ (Forma general de la circunferencia)

Dados el centro C(-1/2, 5/4) y el radio $r = \sqrt{3}$ determinar la ecuación general de la circunferencia.

a.- Sustituyendo en la ecuación particular.

$(x + 1/2)^2 + (y - 5/4)^2 = (\sqrt{3})^2$ Factorizando

$x^2 + 2x(1/2) + 1/4 + y^2 + 2y(-5/4) + 25/16 = 3$

$x^2 + y^2 + x - 5/2y + 1/4 + 25/16 - 3 = 0$

$x^2 + y^2 + x - 5/2y + 16/(16)(4) + 25/16 - (16)(3)/16 = 0$

$x^2 + y^2 + x - 5/2y + 4/16 + 25/16 - 48/16 = 0$

$x^2 + y^2 + x - 5/2y + (4 + 25 - 48)/16 = 0$

$x^2 + y^2 + x – 5/2y - 19/16 = 0$ (Forma gral. de la circunferencia)

b.- Mediante formulas.

$D = - 2h = - 2 (-1/2) = 1$

$E = - 2k = -2 (5/4) = -5/2$

$F = h^2 + k^2 - r^2 = (-1/2)^2 + (5/4)^2 - (\sqrt{3})^2 = - 19/16$

Sustituyendo en fórmula general

$A x^2 + C y^2 + D x + E y + F = 0$

$x^2 + y^2 + x – 5/2y - 19/16 = 0$ (Forma gral. de la circunferencia)

TAREA 2.

1. Obtener las ecuaciones de las circunferencias y graficarlas.

a) Centro en (0, 0) y radio 1
b) Centro en (3, -1) y radio 5
c) Centro en (0, -4) y radio 9
d) Centro en (1, 0) y radio 3

2. Obtener las ecuaciones de las circunferencias y graficarlas.

a) Centro en (4, -1) y punto (-1, 3)
b) Centro en (0, 0) y punto (4, 3)
c) Centro en (5, -2) y punto (-1, 5)

3. Obtener las ecuaciones de las circunferencias para lo cual uno de sus diámetros son los segmentos que unen los puntos y graficarlas.

a) Puntos (-3, 5) y (7, -3)
b) Puntos (5, -1) y (-3, 7)

4. Dadas las siguientes ecuaciones, decir si representan o no una circunferencia, obteniendo su centro y su radio, de ser posible. Aplicar las fórmulas y comprobar completando cuadrados.

a) $x^2 + y^2 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x - 7y = 0$

d) $3x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$

e) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 8 = 0$

f) $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 1 = 0$

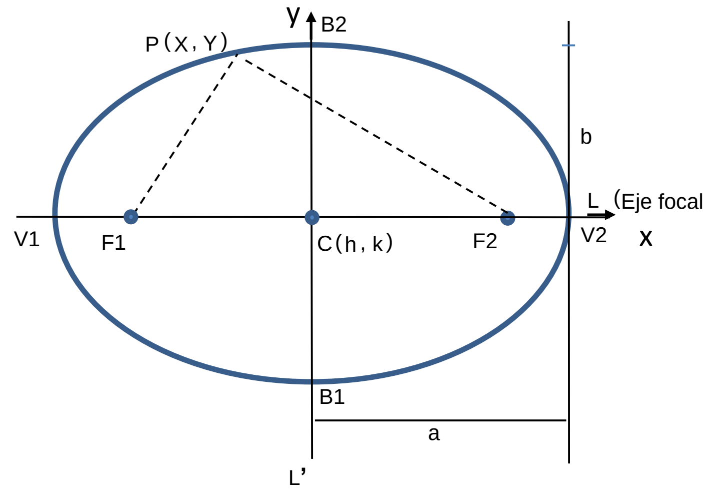
5) Obtener las ecuaciones de las circunferencias que contenga los puntos.

a) (4, 5), (3, - 2) y (1, - 4)
b) (5, 3), (6, 2) y (3, -1)

LA ELIPSE

Definición: La suma de las distancias de cualesquiera de sus puntos geométricos a dos puntos fijo F1 y F2 (focos) es constante.

$$\overline{F1\,P} + \overline{P\,F2} = Cte.$$



DE LA ECUACIÓN CARTESIANA GENERAL DE 2do. GRADO

Para B=0

$$\mathbf{AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0}$$

Ecuación Cartesiana General. de la elipse con eje focal paralelo o coincidentes con los ejes X o Y.

Indicador o discriminante:

$$\mathbf{I = B^2 - 4AC}$$

Si **$I < 0$** la ecuación representa un tipo de **elipse**.

De la ecuación general de la elipse.

Si $A \neq 0$, $C \neq 0$, $A \neq C$ y de signos iguales, con $N > 0$ e $I < 0$ representa una elipse.

Si $A < C$ representa una elipse con eje focal paralelo o coincidente con el eje X.

Si $A > C$ representa una elipse con eje focal paralelo o coincidente con el eje Y.

GRV3

LA ELIPSE

Ejemplo

Dada la siguiente ecuación cartesiana general de segundo grado, determinar si se trata de una elipse.

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$$

Solución.

Partiendo de: **Ax + Cy + Dx + Ey + F = 0**

Si $I = B^2 - 4AC < 0$; $I = (0)^2 - 4(1)(4) = -16 < 0$

Por lo que la ecuación representa una cónica del tipo elipse con eje focal paralelo o coincidente con el eje x.

Reacomodando y desarrollando:

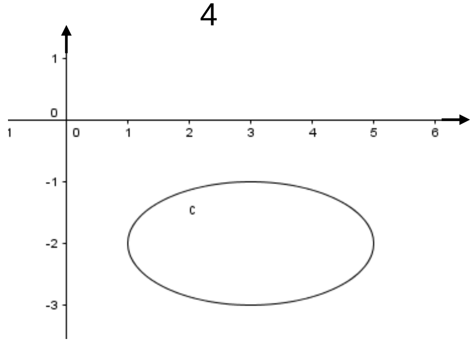
$x^2 - 6x + 4y^2 + 16y + 21 = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + 4(y^2 + 4y) + 21 = 0$

Completando cuadrado. $\Longrightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + 4(y^2 + 4y + 4 - 4) + 21 = 0$

$(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = -21 + 9 + 16 \Longrightarrow (x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 4$

Dividiendo toda la ecuación entre 4 $\Longrightarrow \dfrac{(x - 3)^2}{4} + (y + 2)^2 = 1$

$$\frac{(x - 3)^2}{2^2} + (y + 2)^2 = 1$$



Por lo que es una elipse con c(3, -2), semieje mayor paralelo al eje X, a = 2 y semieje menor b = 1.

Ejemplo

Dada la siguiente ecuación cartesiana general de segundo grado $-2x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 5 = 0$, determinar si se trata de una elipse.

Solución.

Multiplicando toda la ecuación por menos, $2x^2 + 3y^2 - 6x - 6y - 5 = 0$

Partiendo de: **Ax + Cy + Dx + Ey + F = 0**

Donde A = 2, B = 0, C = 3, D = - 6, E = - 6 y F = - 5

Por lo que $A \neq 0$, $C \neq 0$, $A < C$, de signos iguales, y

$I = (0)^2 - 4(-2)(-3) = -48 < 0$ La ecuación representa una cónica del tipo elipse con eje focal paralelo o coincidente con el eje x.

Reacomodando y desarrollando:

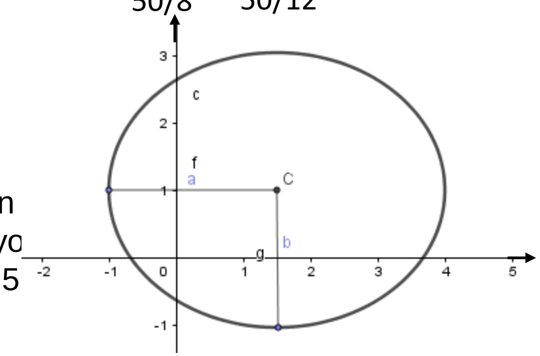
$2x^2 - 6x + 3y^2 - 6y - 5 = 0 \Longrightarrow 2(x^2 - 3x) + 3(y^2 - 2y) - 5 = 0$

$2(x^2 - 3x + 9/4) - 18/4 + 3(y^2 - 2y + 1) - 3 - 5 = 0$

$2(x - 3/2)^2 + 3(y - 1)^2 = 18/4 + 3 + 5 \Longrightarrow 2(x - 3/2)^2 + 3(y - 1)^2 = \dfrac{50}{4}$

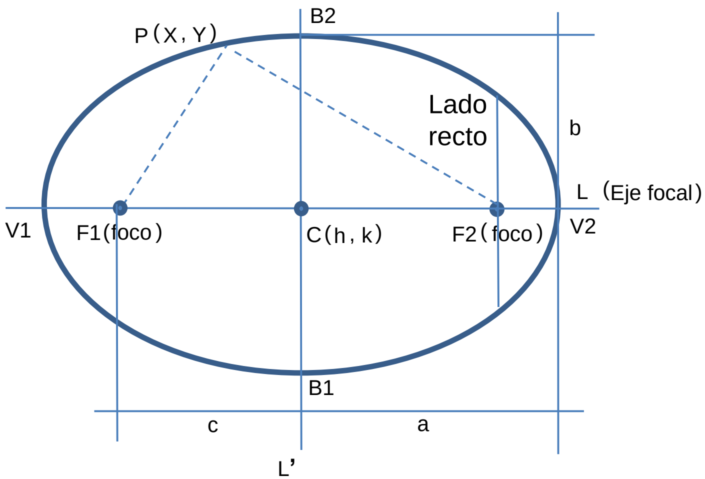
$\dfrac{8(x - 3/2)^2}{50} + \dfrac{12(y - 1)^2}{50} = 1 \Longrightarrow \dfrac{(x - 3/2)^2}{50/8} + \dfrac{(y - 1)^2}{50/12} = 1$

$$\frac{(x - 3/2)^2}{(2.5)^2} + \frac{(y - 1)^2}{(2.04)^2} = 1$$



Por lo que es una elipse con c(1.5, 1), semieje mayo paralelo al eje X, a = 2.5 y semieje menor b = 2.04.

CONDICION GEOMETRICA Y REPRESENTACION ANALITICA



ECUACIONES DE LA ELIPSE

- Centro en el origen (0, 0)
  - Eje focal en el eje X: $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$; $a > b$
  - Eje focal en el eje Y: $\frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$; $a > b$
- Centro en un punto (h, k)
  - Eje focal paralelo o coincidente al eje X: $\frac{(X-h)^2}{a^2} + \frac{(Y-k)^2}{b^2} = 1$; $a > b$
  - Eje focal paralelo o coincidente al eje X: $\frac{(X-h)^2}{b^2} + \frac{(Y-k)^2}{a^2} = 1$; $a > b$

Ejemplo.

Dada la ecuación cartesiana gral. $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$ determinar la ecuación cartesiana en forma ordinaria de la elipse y graficar.

Solución

$4x^2 - 48x + 9y^2 + 72y + 144 = 0$ Factorizando

$4(x^2 - 12x) + 9(y^2 + 8y) + 144 = 0$ Completando cuadrados

$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) \; -144 - 144 + 144 = 0$

$4(x - 6)^2 + 9(y + 4)^2 - 144 = 0$

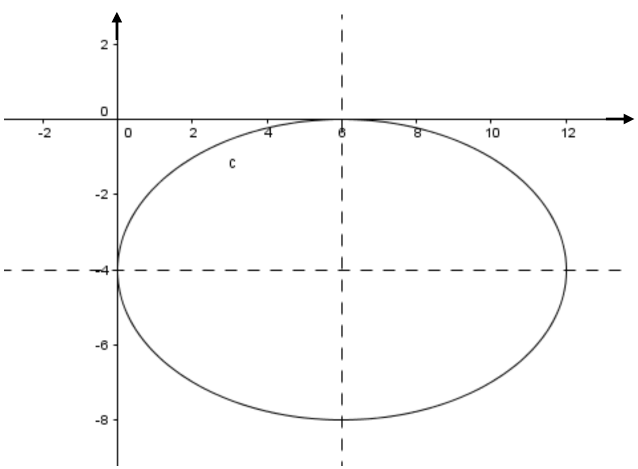
$4(x - 6)^2 + 9(y + 4)^2 = 144$ Dividiendo entre 144

$$\frac{4(x - 6)^2}{144} + \frac{9(y + 4)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x - 6)^2}{36} + \frac{(y + 4)^2}{16} = 1$$ (a > b elipse coincidente con eje X)

$$\frac{(x - 6)^2}{6^2} + \frac{(y + 4)^2}{4^2} = 1$$

Gráfica



Ejemplo.

Dada la ecuación cartesiana en forma ordinaria de la elipse, determinar la ecuación cartesiana general.

$$\frac{(x - 6)^2}{36} + \frac{(y + 4)^2}{16} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{16(x - 6)^2 + 36(y + 4)^2}{(16)(36)} = 1$$

$16(x - 6)^2 + 36(y + 4)^2 = (16)(36)$ Dividiendo entre 4

$4(x - 6)^2 + 9(y + 4)^2 = (16)(9)$ Desarrollando productos

$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = (16)(9)$

$4x^2 - (4)(12)x + (4)(36) + 9y^2 + (9)(8)y + (9)(16) - (16)(9 = 0$

$4x^2 - 48x + 144 + 9y^2 + 72y = 0$ Ordenando

$4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$ Ecuación cartesiana general de la elipse.

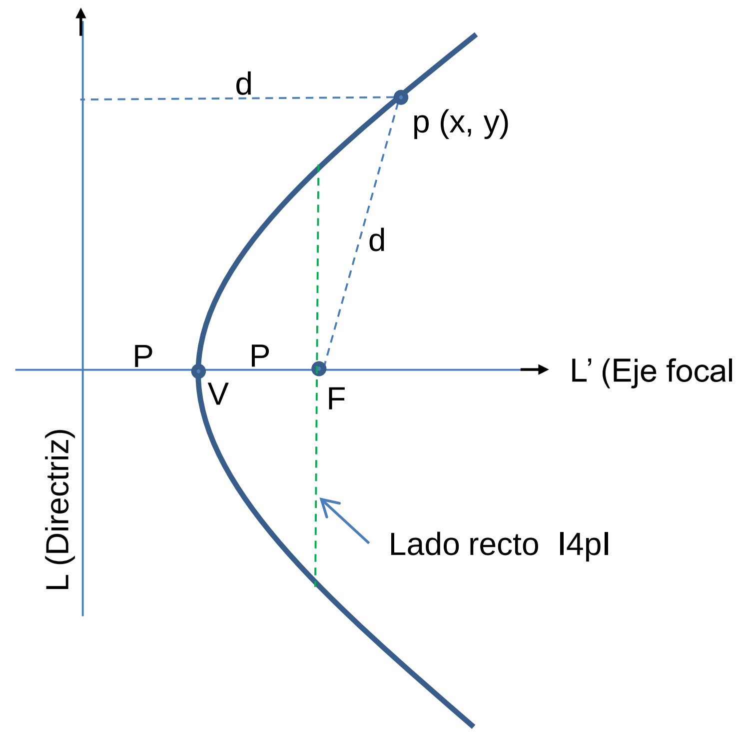
Con $I = B - 4AC$

$I = (0) - 4(4)(9) = - 144 < 0$

LA PARÁBOLA

Definición: Todos sus puntos "P" equidistan de un punto fijo F(foco) y de una recta fija L(Directriz).

$$d = \overline{PF}$$



De la Ec. Cart. Gral. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, **Para B =0**

$AX^2 + DX + EY + F = 0$ Ecuación cartesiana general de la parábola con vértice y eje focal paralelo al eje Y.

$CY^2 + DX + EY + F = 0$ Ecuación cartesiana general. de la parábola con vértice y eje focal paralelo al eje X.

$AX^2 + EY = 0$ Ecuación cartesiana general de la parábola con vértice en el origen y eje focal coincidente al eje Y.

$CY^2 + DX = 0$ Ecuación cartesiana general de la parábola con vértice en el origen y eje focal coincidente al eje X.

Indicadores o discriminantes:

$$I = B^2 - 4AC$$

Si **I = 0,** la ecuación representa una parábola, dos rectas paralelas o coincidentes, o ningún lugar geométrico.

GRV4

De la ecuación cartesiana general de la parábola.   Para **B = 0**

Si **A = 0 ó C = 0** representa una parábola, dos rectas paralelas o coincidentes o ningún lugar geométrico.

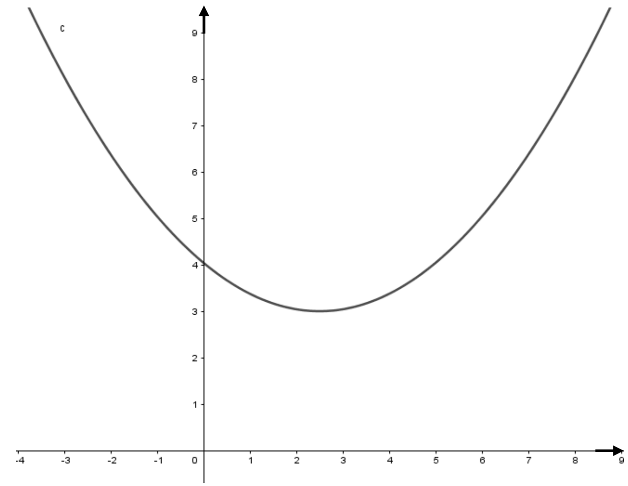
Si **A = 0, C ≠ 0, D ≠ 0** representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje X.

Si **A ≠ 0, C = 0, E ≠ 0** representa una parábola cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje Y.

Si **A = 0, C ≠ 0, D = 0**   **ó**   **A ≠ 0, C = 0, E = 0** ningún lugar geométrico.

Ejemplos.

1. Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola.

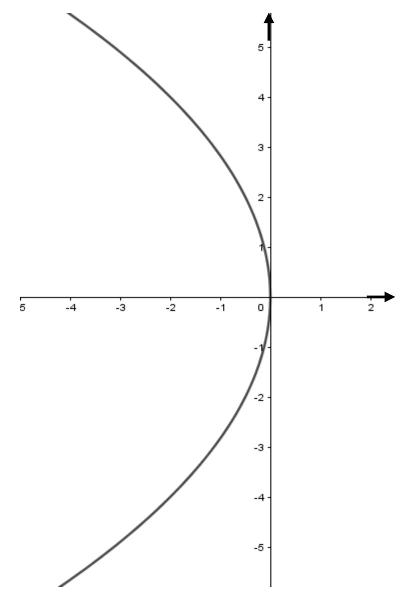


Solución

Como **B = 0** los ejes de las cónicas son paralelos o coincidentes con los ejes coordenados.

Como **A ≠ 0 , C = 0, D ≠ 0, E ≠ 0** y F ≠ 0 representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y.

2. Demostrar que la ecuación $y^2 + 8x = 0$ representa una parábola.

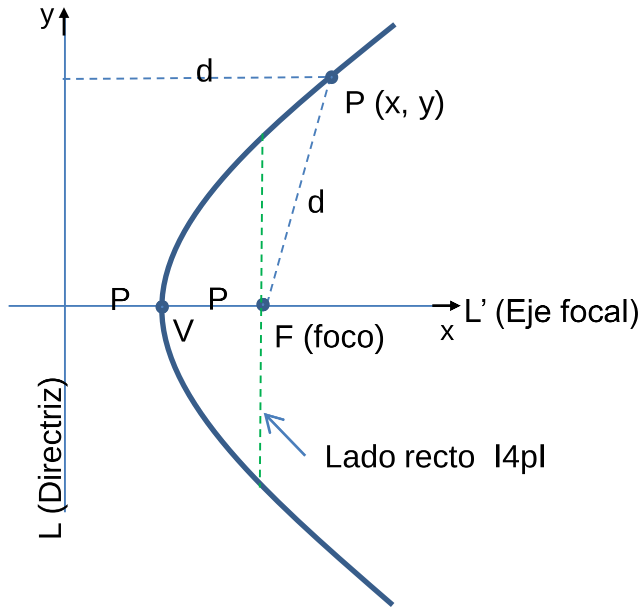


Solución

Como **B = 0** los ejes de las cónicas son paralelos o coincidentes con los ejes coordenados.

Como **A = 0, C ≠ 0, D ≠ 0, E = 0 y F = 0** representa una parábola cuyo vértice esta en el origen y el eje es coincidente con el eje X.

CONDICIÓN GEOMÉTRICA Y REPRESENTACIÓN ANALITICA DE LA PARÁBOLA



ECUACIONES DE LA PARÁBOLA

- Vértice en el origen
  - Eje focal en el eje X: $y^2 = 4px$
    - P > 0 Abre hacia la derecha
    - P < 0 Abre hacia la izquierda
  - Eje focal en el eje Y: $x^2 = 4py$
    - P > 0 Abre hacia arriba
    - P < 0 Abre hacia abajo
- Vértice en el punto (h, k)
  - Eje focal paralelo en el eje X: $(y - k)^2 = 4p(x – h)$
    - P > 0 Abre hacia la derecha
    - P < 0 Abre hacia la izquierda
  - Eje focal paralelo en el eje Y: $(x – h)^2 = 4p(y – k)$
    - P > 0 Abre hacia arriba
    - P < 0 Abre hacia abajo

Ejemplos

1. Dada la ecuación general $y^2 - 12x - 10y + 49 = 0$ determinar la ecuación particular de la parábola y graficar.

Solución

Parábola con vértice y eje focal paralelo al eje X.

Como B = 0 y $C \neq 0$, $D \neq 0$, $E \neq 0$ y $F \neq 0$ Representa una parábola

Ordenando

$y^2 - 10y - 12x + 49 = 0$ Completando cuadrados

$(y^2 - 10y + 25) - 12x + 49 - 25 = 0$

$(y - 5)^2 - 12x + 24 = 0$

$(y - 5)^2 = 12x - 24$ Factorizando

$(y - 5)^2 = 12(x - 2)$ descomponiendo el lado recto "12"

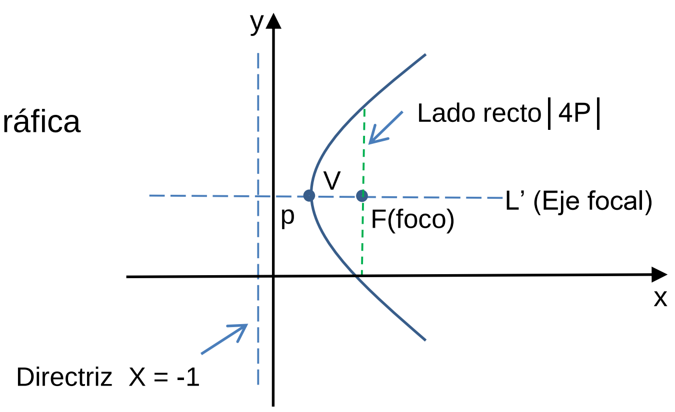
$(y - 5)^2 = (4)(3)(x - 2)$ por lo tanto

V(2, 5), como P = 3 > 0 abre hacia la derecha

Coordenada del foco en x = 2 + 3 = 5, así que F(5, 5)

Lado recto $|4p| = 12$ y Ec. de la directriz X= 2- P = 2-3 = -1

Gráfica



2.- Dada la ecuación general $x^2 + 2x - 12y + 49 = 0$ determinar la ecuación ordinaria de la parábola y graficar.

Solución

Parábola con vértice y eje focal paralelo al eje Y.

Como B = 0 y $A \neq 0$, $D \neq 0$, $E \neq 0$ y $F \neq 0$ Representa una parábola

Ordenando

$x^2 + 2x - 12y + 49 = 0$ Completando cuadrados

$(x^2 + 2x + 1) - 12y + 49 - 1 = 0$ producto notable y fact.

$(x + 1)^2 - 12y + 48 = 0$ Factorizando

$(x + 1)^2 - 12(y - 4) = 0$

$(x + 1)^2 = 12(y - 4)$ descomponiendo el lado recto "12"

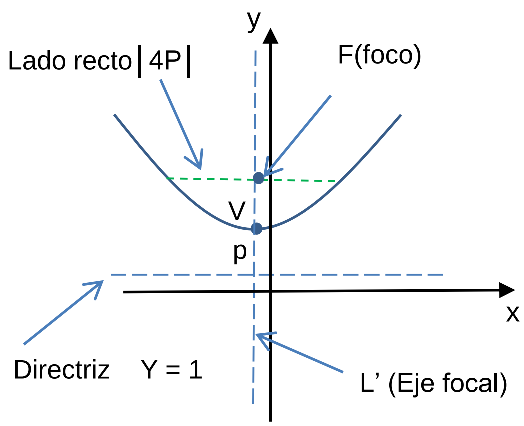
$(x + 1)^2 = (4)(3)(y - 4)$ por lo tanto

V(-1, 4), como P = 3 > 0 abre hacia arriba

Coordenada del foco en y = 4 + 3 = 7, así que F(-1, 7)

Lado recto $|4p| = 12$ y Ec. de la directriz Y= 4- P = 4-3 = 1

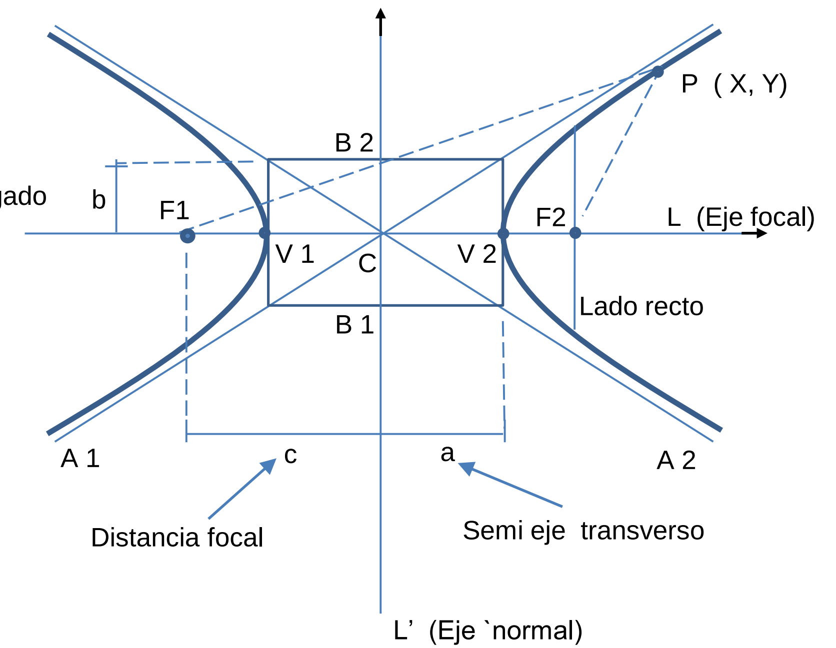
Gráfica



LA HIPÉRBOLA

Definición: La diferencia en valor absoluto de las distancias de cualesquiera de sus puntos a dos puntos fijos F1 y F2 (Focos) es constante

$$d = V2 - V1 = \left| \overline{F1\,P} - \overline{F2\,P} \right|$$



De la Ec. de 2° $\quad$ $\mathbf{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,}$ $\quad$ **Para B = 0**

$\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$ $\quad$ Ecuación cartesiana general de la hipérbola.

Indicador o discriminantes:

$\mathbf{I = B^2 - 4AC}$

Si **I > 0,** la ecuación representa una hipérbola o dos rectas que se interceptan en un punto.

Indicador

$\mathbf{N = CD^2 + AE^2 - 4ACF}$

Si $A \neq 0$, $C \neq 0$ con signos contrarios y $N \neq 0$ $\quad$ Hipérbola con eje focal paralelo o coincidente con el eje X o con el eje Y

Si $A \neq 0$, $C \neq 0$ con signo contrario y $N = 0$ $\quad$ Dos rectas que se encuentran en un punto.

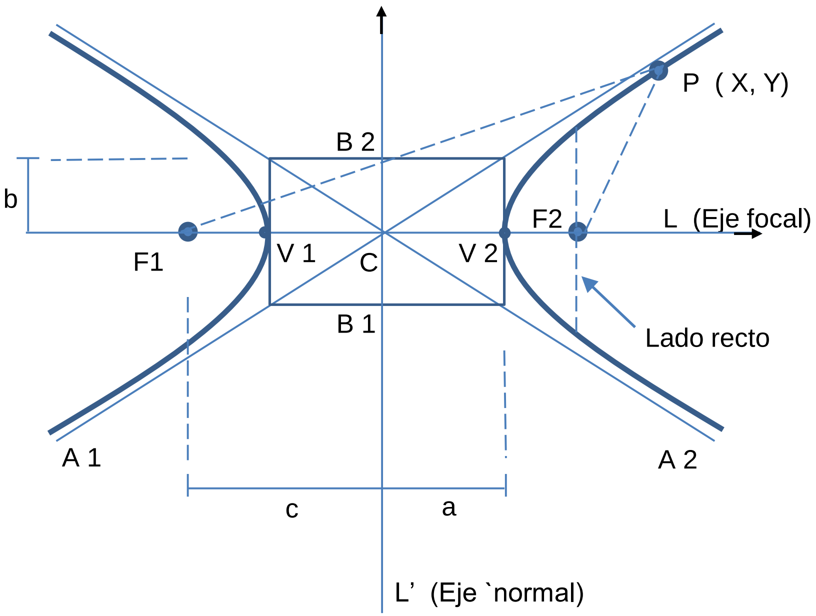
CONDICION GEOMETRICA Y REPRESENTACION ANALITICA

Longitud del lado recto = $\frac{2b}{a}$

Eje transverso $\overline{V1\ V2} = 2a$

Eje conjugado $\overline{B1\ B2} = 2b$

Longitud entre focos = 2C , donde $C = \sqrt{a^2 + b^2}$



ECUACIONES DE LA HIPERBOLA

Centro en el Origen

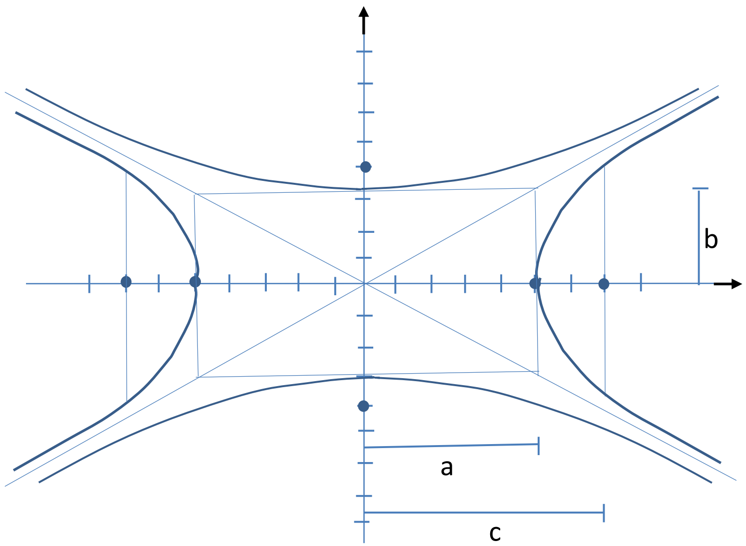
- Eje focal en el eje X: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Asíntotas A1 y A2: $Y = \frac{bx}{a}$ $Y = -\frac{bx}{a}$
- Eje focal en el eje Y: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
- Asíntotas A1 y A2: $Y = \frac{ax}{b}$ $Y = -\frac{ax}{b}$

Centro en un Punto

- Eje focal paralelo o coincidente al eje X: $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$
- Eje focal paralelo o coincidente al eje Y: $\frac{(y - h)^2}{a^2} - \frac{(x - k)^2}{b^2} = 1$

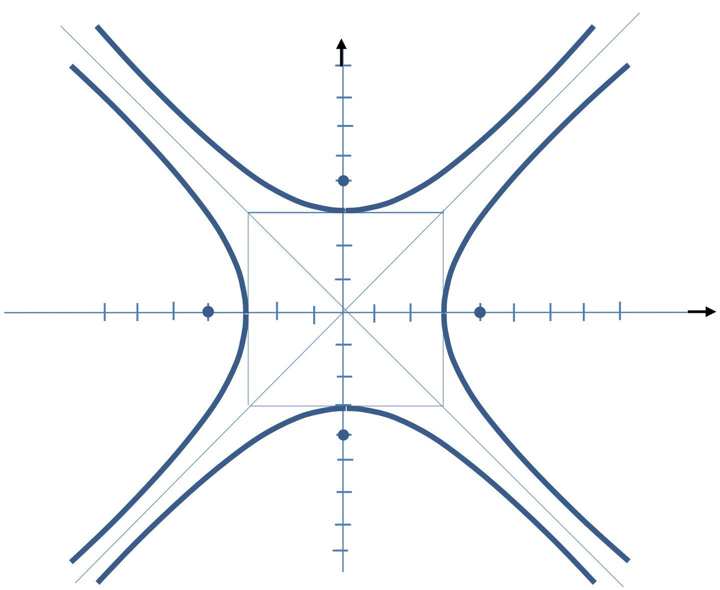
Conjugada Centro en el origen (0, 0)

- Eje focal en el eje X
  - $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
  - $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
- Eje focal en el eje Y
  - $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
  - $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



(Equilátera) centro en el Origen

- Eje focal en el eje X: $x^2 - y^2 = a^2$; $a = b$
- Eje focal en el eje Y: $y^2 - x^2 = a^2$; $a = b$
- Eje focal girado 45° con respecto a los ejes: $x\, y = K$; $K = \text{cte.} \neq 0$



EJEMPLOS

1.- Dada la Ec. Cartesiana Gral. $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ determinar si es una hipérbola.

Hipérbola con vértice y eje focal paralelo al eje X.

Como B = 0, A = 9, C = -16, D = -18, E = -64 y F = -199

$I = B^2 - 4AC$ $= 0^2 - 4(9)(-16) = 576 > 0$ **Es una ecuación del tipo hipérbola**

Ordenando

$9x^2 - 18x - 16y^2 - 64y - 199 = 0$ Factorizando

$9(x^2 - 2x) - 16(y^2 + 4y) - 199 = 0$ Completando cuadrados

$9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 + 4y + 4) - 9 + 64 - 199 = 0$

$9(x - 1)^2 - 16(y + 2)^2 = 144$ Dividiendo entre 144

$$\frac{9(x-1)^2}{144} - \frac{16(y+2)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

Ecuación de la Hipérbola

$$\frac{(x-1)^2}{4^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$$

c(1, -2)

$a^2 = 16$, a = 4; $b^2 = 9$, b = 3

$C = \sqrt{16 + 9} = 5$; 2C = 10

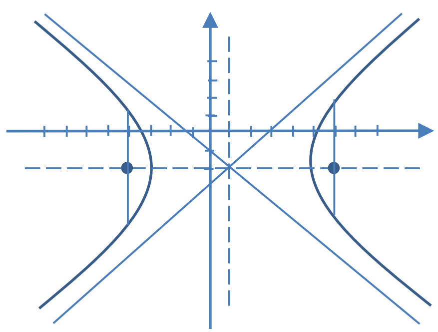
V1(5, -2); V2(-3, -2)

F1(6, -2); F2(-4, -2)

$$LR = \frac{2b^2}{a} = 4.5$$

$$y + 2 = \frac{3}{4}(x - 1)$$

$$y + 2 = -\frac{3}{4}(x - 1)$$



GRV10

2.- Dada la ecuación cartesiana general $25y^2 - 144x^2 = 3600$ determinar si es una hipérbola.

Hipérbola con vértice y eje focal coincidente al eje Y.

Como B = 0, A = -144, C = 25, D = 0, E = 0 y F = 0

$I = B^2 - 4AC$ $= 0^2 - 4(-144)(25) = 14400 > 0$ **Es una ecuación del tipo hipérbola**

Con A ≠ 0 y C ≠ 0 y de signos diferentes **Representa una Hipérbola.**

$25y^2 - 144x^2 = 3600$ Dividiendo entre 3600

$$\frac{25y^2}{3600} - \frac{144x^2}{3600} = \frac{3600}{3600}$$

$$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$$

$$\frac{y^2}{12^2} - \frac{x^2}{5^2} = 1$$ Ecuación de la Hipérbola

c(0, 0).

$a^2 = 144$, a = 12; $b^2 = 25$, b = 5

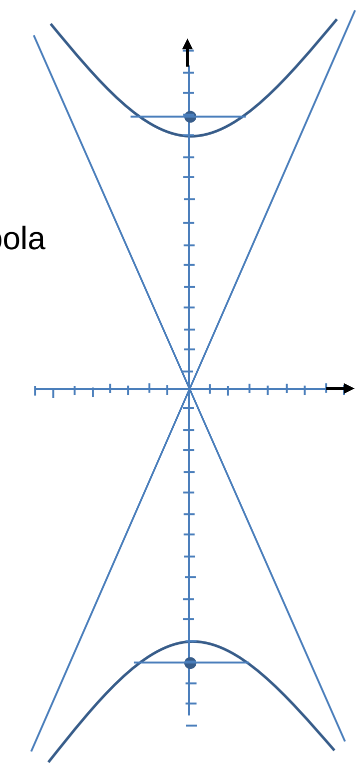
$C = \sqrt{144 + 25} = 13$; 2C = 26

V1(0, -12); V2(0, 12)

F1(0, 13); F2(0, -13)

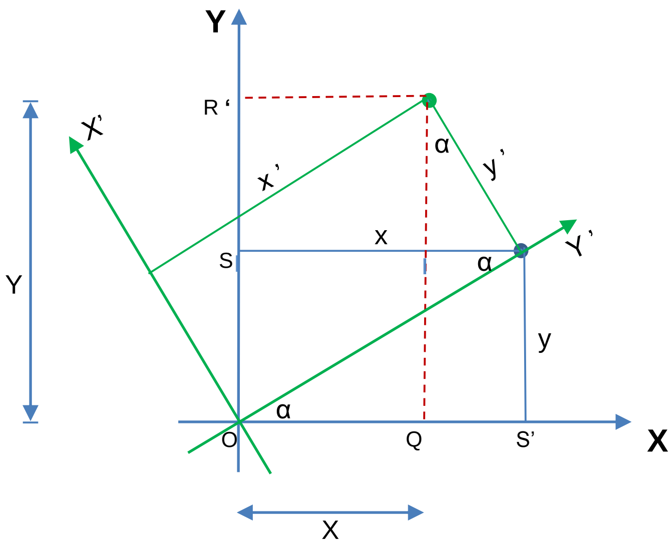
LR = 4.17

$$y = \frac{a}{b}x = \frac{12}{5}x$$



GRV11

ROTACION DE EJES



De la figura se obtiene

$$X = \overline{OQ} = \overline{OS'} - \overline{QS'}$$

$$Y = \overline{OR'} = \overline{OS} + \overline{SR'}$$

donde

$OS' = x' \cos \alpha$ $\quad QS' = y' \operatorname{sen} \alpha$

$OS = x' \operatorname{sen} \alpha$ $\quad SR' = y' \cos \alpha$

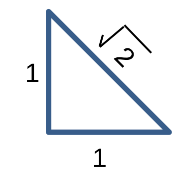
sustituyendo

$$X = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha$$

$$Y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha$$

$$X' = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha$$

$$Y' = - x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$$



Para α = 45°

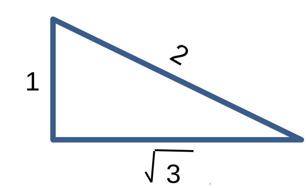
$$X = x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$

$$Y = x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Para α = 30°

$$X = x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{x'\sqrt{3} - y'}{2}$$

$$Y = x'\left(\frac{1}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{x' + y'\sqrt{3}}{2}$$



Para α = 60°

$$X = x'\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{x' - y'\sqrt{3}}{2}$$

$$Y = x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{x'\sqrt{3} + y'}{2}$$

Ejemplo:

Dada la ecuación $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$, transformarla a un sistema rotado a 45°

Solución:

$X = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$ $Y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$ Sustituyendo en ecuación

$$\left[\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right]^2 - 2\left[\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right]\left[\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right] + \left[\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right]^2 + 2\left[\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right] - 4\left[\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right] + 3 = 0$$

$$\frac{(x'-y')^2}{2} - \frac{2(x'-y')(x'+y')}{2} + \frac{(x'+y')^2}{2} + \frac{(2x'-2y')}{\sqrt{2}} - \frac{(4x'+4y')}{\sqrt{2}} + 3 = 0$$ Multiplicando por dos

$$(x'-y')^2 - 2(x'-y')(x'+y') + (x'+y')^2 + \frac{(4x'-4y')}{\sqrt{2}} - \frac{(8x'+8y')}{\sqrt{2}} + 6 = 0$$ Factorizando

$$x'^2 - \cancel{2x'y'} + y'^2 - 2(x'^2 - y'^2) + x'^2 + \cancel{2x'y'} + y'^2 + \frac{(4x'-4y') - (8x'+8y')}{\sqrt{2}} + 6 = 0$$

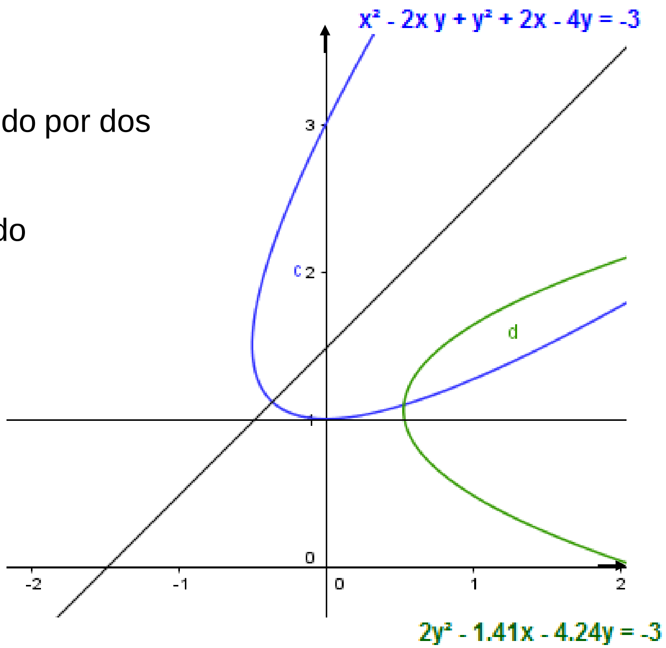
$$\cancel{2x'^2} + 2y'^2 - \cancel{2x'^2} + 2'y'^2 + \frac{(4x'-4y'-8x'-8y')}{\sqrt{2}} + 6 = 0$$

$$4y'^2 + \frac{(-4x'-12y')}{\sqrt{2}} + 6 = 0$$ dividiendo entre 2

$$2y'^2 + \frac{(-2x'-6y')}{\sqrt{2}} + 3 = 0$$

$$2y'^2 - \frac{2x'}{\sqrt{2}} - \frac{6y'}{\sqrt{2}} + 3 = 0$$ Racionalizando $\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ $\frac{6}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$$2y'^2 - \sqrt{2}\,x' - 3\sqrt{2}\,y' + 3 = 0$$ Ecuación rotada a 45°



EJEMPLO: Hallar el ángulo de rotación para que se elimine el termino xy de la ecuación $7x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 = 16$

$X = x'\cos\alpha - y'\,\text{sen}\,\alpha$
$Y = x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha$ Sustituyendo en Ec.

$7(x'\cos\alpha - y'\,\text{sen}\,\alpha)^2 - 6\sqrt{3}(x'\cos\alpha - y'\,\text{sen}\,\alpha)(x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha) + 13(x'\,\text{sen}\,\alpha + y'\cos\alpha)^2 = 16$

$7(x'^2\cos^2\alpha - 2x'y'\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + y'^2\,\text{sen}^2\alpha)$

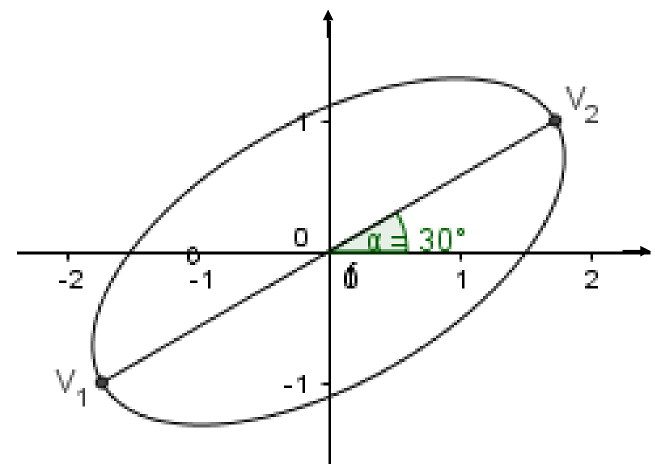
$- 6\sqrt{3}\,(x'^2\cos\alpha\,\text{sen}\alpha + x'y'\cos^2\alpha - y'x'\,\text{sen}^2\alpha - y'^2\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha)$

$13(x'^2\,\text{sen}^2\alpha + 2x'y'\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + y'^2\cos^2\alpha) = 16$ Multiplicando

$7x'^2\cos^2\alpha - 14x'y'\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + 7y'^2\,\text{sen}^2\alpha$

$- 6\sqrt{3}\,x'^2\cos\alpha\,\text{sen}\alpha - 6\sqrt{3}\,x'y'\cos^2\alpha + 6\sqrt{3}\,x'y'\,\text{sen}^2\alpha + 6\sqrt{3}\,y'^2\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha$

$13x'^2\,\text{sen}^2\alpha + 26x'y'\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + 13y'^2\cos^2\alpha) = 16$ Agrupando



$x'^2(7\cos^2\alpha - 6\sqrt{3}\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + 13\,\text{sen}^2\alpha) +$

$y'^2(7\,\text{sen}^2\alpha + 6\sqrt{3}\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + 13\cos^2\alpha)$

$x'y'(-14\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha - 6\sqrt{3}\cos^2\alpha + 6\sqrt{3}\,\text{sen}^2\alpha + 26\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha) = 16$ para que x'y' se elimine, se iguala a cero el termino ()

$-14\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha - 6\sqrt{3}\cos^2\alpha + 6\sqrt{3}\,\text{sen}^2\alpha + 26\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha = 0$ reduciendo

$12\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha + 6\sqrt{3}\,(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha) = 0$

$6(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha) + 6\sqrt{3}\,(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha) = 0$ Por identidades trigonométricas

$\text{sen}\,2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos\ \alpha - \text{sen}\ \alpha$
$= -(\text{sen}\ \alpha - \cos\ \alpha$

$6\,\text{sen}\,2\alpha - 6\sqrt{3}\cos 2\alpha = 0$

$6\,\text{sen}\,2\alpha = 6\sqrt{3}\cos 2\alpha \longrightarrow \dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \longrightarrow \text{tg}\,2\alpha = \sqrt{3} \longrightarrow 2\alpha = \text{ang tg}\sqrt{3} \longrightarrow 2\alpha = 60° \longrightarrow \alpha = 30°$

Obtener una ecuación de la elipse rotada, con dos puntos cualesquiera P1(-3, 2) y P2(3, - 4) y con el eje de foco aproximado a 10.

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} = 10$$

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2} = 10 - \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2}$$ elevando al cuadrado para eliminar raíces

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = \left[10 - \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2}\right]^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 10^2 – 2(10)\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} + \left[\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2}\right]^2$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 100 – 20\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} + (x - 3)^2 + (y + 4)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 100 - 20\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} + x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16$$

$$20\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} = -12x + 12y + 112$$ dividiendo entre 4 para minimizar expresión

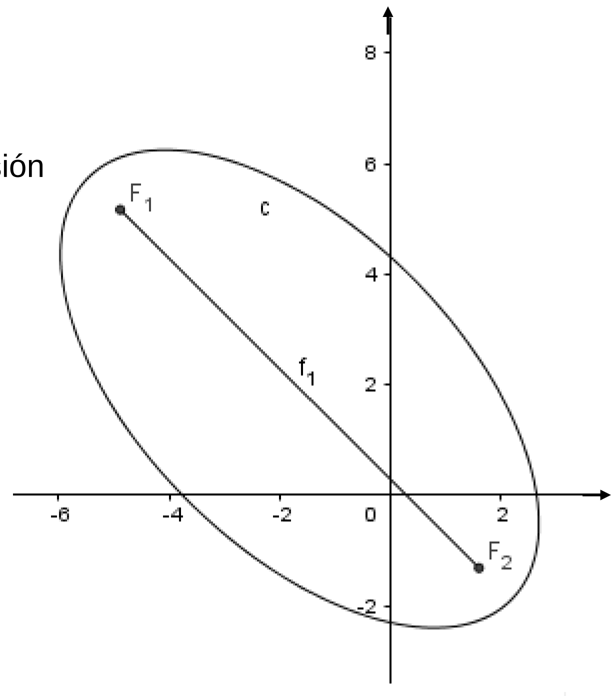
$$5\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 4)^2} = - 3x + 3y + 28$$ elevando al cuadrado

$$25\left[(x - 3)^2 + (y + 4)^2\right] = \left[- 3x + (3y + 28)\right]^2$$

$$25(x^2 -6x + 9 + y^2 + 8y + 16) = 9x^2 - 6x(3y + 28) + (3y + 28)^2$$

$$25x^2 -150x + 225 + 25y^2 + 200y + 400 = 9x^2 -18xy - 168x + 9y^2 + 168y + 784$$

$$16x^2 + 18xy + 16y^2 + 18x – 32y – 159 = 0$$



$c: 16x^2 + 18x\,y + 16y^2 + 18x - 32y = 159$

Del ejemplo anterior rotar a 45° la ecuación $16x^2 + 18xy + 16y^2 + 18x – 32y – 159 = 0$

Para 45° $x = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}}$; $y = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}}$ sustituyendo en ecuación

$$16\left[\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right]^2 + 18\frac{(x' - y')}{\sqrt{2}}\frac{(x' + y')}{\sqrt{2}} + 16\left[\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right]^2 + 18\frac{(x' - y')}{\sqrt{2}} - 32\frac{(x' + y')}{\sqrt{2}} - 159 = 0$$

$$16\frac{(x' - y')^2}{2} + 18\frac{(x' - y')(x' + y')}{2} + 16\frac{(x' + y')^2}{2} + 18\frac{(x' - y')}{\sqrt{2}} - 32\frac{(x' + y')}{\sqrt{2}} - 159 = 0$$

$$8(x' - y')^2 + 9(x' - y')(x' + y') + 8(x' + y')^2 + 18\frac{(x' - y')}{\sqrt{2}} - 32\frac{(x' + y')}{\sqrt{2}} - 159 = 0$$

$$8(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + 9(x'^2 - y'^2) + 8(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + \frac{(18x' - 18y') - (32x' + 32y')}{\sqrt{2}} - 15$$

$$8x'^2 - 16x'y' + 8y'^2 + 9x'^2 - 9y'^2 + 8x'^2 + 16x'y' + 8y'^2 + \frac{18x' - 18y' - 32x' - 32y'}{\sqrt{2}} - 159 = 0$$

$$25x'^2 + 7y'^2 - \frac{14x' - 50y'}{\sqrt{2}} - 159 = 0$$

$$25x'^2 + 7y'^2 - \frac{14x'}{\sqrt{2}} – \frac{50y'}{\sqrt{2}} - 159 = 0$$

Racionalizando los términos 3er y 4to. $\dfrac{14x'}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{14\sqrt{2}\,x'}{2} = 7\sqrt{2}\,x'$; $\dfrac{50y'}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{50\sqrt{2}\,y'}{2} = 25\sqrt{2}\,y'$

$$25x'^2 + 7y'^2 - 7\sqrt{2}\,x' - 25\sqrt{2}\,y' - 159 = 0$$

$$25x'^2 + 7y'^2 - 9.9x' – 35.36y' -159 = 0$$