Tema 4. Derivación y diferenciación de funciones escalares de dos o más variables. (18.5 horas / 4.62 semanas).

Objetivo:
El alumno analizará la variación de una función escalar de variable vectorial respecto a cada una de sus variables y resolverá problemas físicos y geométricos.

Subtema 4.1. Definición de funciones escalares de variable vectorial. Región de definición.

Una función escalar de varias variables (de variable vectorial) es aquella que su dominio está en un espacio de dos dimensiones o de n dimensiones y su codominio en R.

La expresión cartesiana de una función escalar de variable vectorial es
z = f(x,y) ó f(x,y,z)=0

La región de definición de la función es el dominio de ella (los valores que toman las variables x, y) y para los cuáles existe z o bien los valores de x e y que tienen (imagen).

El recorrido de estas funciones es el conjunto de valores de z que se obtienen de sustituir las parejas de valores (x,y) que pertenecen al dominio de la función en la regla de f.

La definición de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ como un caso particular de la definición general de función vista en Cálculo Diferencial donde los elementos del dominio son ahora vectores cuya representación gráfica son puntos del espacio $\mathbb{R}^n$ y el recorrido es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y su representación gráfica son puntos del eje real.

Subtema 4.2. Representación gráfica para el caso de funciones de dos variables independientes. Curvas de nivel.

Curvas de contorno

Son las trazas que se obtienen de la intersección de la gráfica de la función con planos horizontales de la forma AZ=C

Curva de nivel.

Se llama traza a la curva que se obtiene de la intersección de un plano con una superficie.

Otra definición:

Cuando una superficie representada por una ecuación del tipo z=f(x,y) se corta con planos paralelos al XY; a las trazas obtenidas se les conoce como Curvas de nivel.

- Se Recomienda al alumno el fascículo de Geometría Analítica titulado Superficies, cuyo autor es el Ing. Érik Castañeda de Isla Puga. Ahí se podrán encontrar ejercicios que ilustran las superficies que se pueden considerar como ejemplos de este tipo de funciones.

Subtema 4.3. Conceptos de límite y continuidad para funciones escalares de variable vectorial de dos variables independientes

Un límite es al que tiende la variable dependiente.

$$L = \lim_{\substack{x \to x_o \\ y = y_o}} f(x, y)$$

Los límites reiterados

$$\text{i)} \lim_{x \to x_o} \left[\lim_{y \to y_o} f(x, y) \right] = L1$$

$$\text{ii)} \lim_{y \to y_o} \left[\lim_{x \to x_o} f(x, y) \right] = L2$$

$$Si\ \ L1 \neq L2\ \ el\ límite\ no\ existe$$

$$Si\ \ L1 = L2\ \ el\ criterio\ no\ decide$$

Continuidad

i) $f(x_o, y_o)$ exista

ii) $\lim_{\substack{x \to x_o \\ y = y_o}} f(x, y)$ existe

iii) $f(x_o, y_o) = \lim_{\substack{x \to x_o \\ y = y_o}} f(x, y)$

Recordar que toda función polinómica siempre es continua.
Toda función racional en donde el denominador es diferente de cero es continua
La suma de funciones continua es continua
El producto de dos funciones continua es continua.
El cociente de dos funciones continuas es continua excepto en donde el denominador es cero.

Subtema 4.4. Derivadas parciales e interpretación geométrica para el caso de dos variables independientes. Vector normal a una superficie. Ecuación del plano tangente y de la recta normal.

Derivada parcial:

Dada la función $z = f(x, y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Ejemplo:
Sea la función $z = 2x^3 - 3xy^2 + 4y^4$
calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 3y^2$;
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6xy + 16y^3$$

Subtema 4.5. Derivadas parciales sucesivas. Teorema de derivadas parciales mixtas.

- La derivada parcial es una nueva función de las variables independientes y por lo tanto, susceptible de volverse a derivar parcialmente con respecto a cada una de sus variables.

Teorema de Schwarz

Sea f(x,y) una función continua y con derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
$$f_{yx=} f_{xy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \textit{Se llama ecuación de Laplace}$$

Subtema 4.6. Función diferenciable. Diferencial total.

Una función $z = f(x, y)$ es diferenciable si su incremento
$\Delta z = f(x + \Delta x), y + \Delta y) - f(x, y)$

puede expresarse como

$$\Delta z = A_1(x,y)\Delta x + A_2(x,y)\Delta y + \gamma_1(x,y,\Delta x,\Delta y)\Delta x + \gamma_2(x,y,\Delta x,\Delta y)\Delta y$$

donde las funciones $A_1(x,y)$, $A_2(x,y)$ son independientes de los incrementos Δx, Δy

y $\gamma_1(x,y,\Delta x,\Delta y)$, $\gamma_2(x,y,\Delta x,\Delta y)$ son tales que

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \gamma_1 = 0 \qquad y \qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \gamma_2 = 0$$

Ejercicio: (función diferenciable)

Determinar si $f(x,y) = 2xy - y^2$ es una función diferenciable.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = 2(x+\Delta x)(y+\Delta y) - (y+\Delta y)^2$$

desarrollando se tiene

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = 2xy + 2x\Delta x + 2y\Delta x + 2\Delta x\Delta y - y^2 - 2y\Delta y - (\Delta y)^2$$

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = 2x\Delta y + 2y\Delta x + 2\Delta x\Delta y - 2y\Delta y - (\Delta y)^2$$

reordenando

$$\Delta f = (2y)\Delta x + (2x-2y)\Delta y + (2\Delta y)\Delta x + (-\Delta y)\Delta y$$

haciendo

$$A_1(x,y) = 2y;\ \ A_2(x,y) = 2x - 2y;\ \ \gamma_1 = 2\Delta y;\ \ \gamma_2 = -\Delta y$$

con lo que se comprueba que **la función $\boldsymbol{f(x,y)}$ es una función diferenciable.**

Para una función $z = f(x,y)$, la diferencial total es $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ la cual puede expresarse como el producto escalar del vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ (que se representa por $\bar{\nabla} f$) y el vector (dx, dy) (que se representa por $d\bar{r}$), es decir

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(dx, dy)$$

$$df = \bar{\nabla} f \cdot d\bar{r}$$

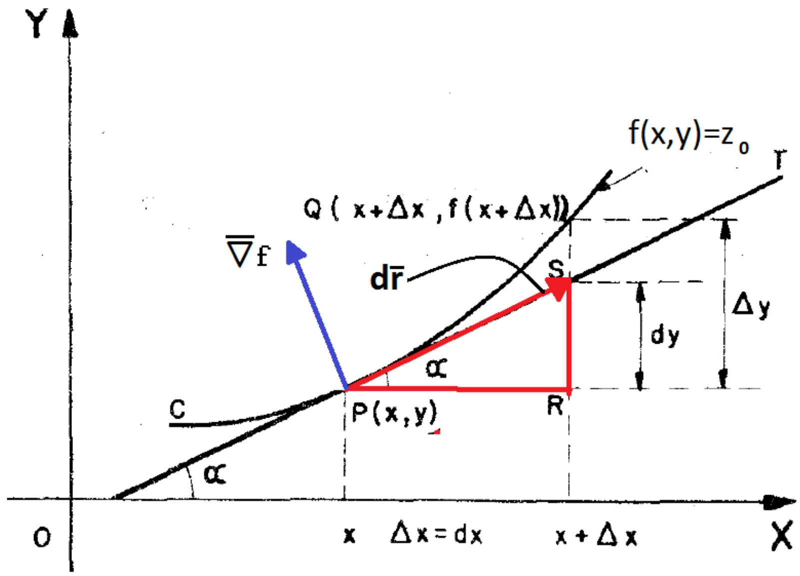
si z es constante ($z = z_0$), se tiene que $f(x,y) = z_0$ define una curva, al diferenciarse da por resultado

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

$$\bar{\nabla} f \cdot d\bar{r} = 0$$

lo anterior implica que el vector $\bar{\nabla} f$ y el vector $d\bar{r}$ son perpendiculares, como el vector $d\bar{r}$ es tangente a la curva $f(x,y) = z_0$, se concluye que el vector $\bar{\nabla} f$ es perpendicular a la curva.

Al vector $\bar{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ se le conoce como el gradiente de la función f y a $\bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ se le llama operador nabla.



Subtema 4.7. Función de función. Regla de la cadena.

Se sugiere:

Regla de la cadena

Las funciones $z = f(u,v)$ donde $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ conforman una función compuesta, la variable z es la variable dependiente, las variables u , v son las variables intermedias y las variables x , y son las variables independientes, de este modo $z = f\big(u(x,y), v(x,y)\big) = z(x,y)$

para obtener $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ plateamos el sistema $\begin{cases} F = z - f(u,v) = 0 \\ G = u - u(x,y) = 0 \\ H = v - v(x,y) = 0 \end{cases}$ donde las variable dependientes son z , u , v y las variable independiente son x , y de este modo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{J\left|\frac{F\ ,\ G\ ,\ H}{x\ ,\ u\ ,\ v}\right|}{J\left|\frac{F\ ,\ G\ ,\ H}{z\ ,\ u\ ,\ v}\right|}$$

$$-\frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial f}{\partial u} & -\frac{\partial f}{\partial v} \\ -\frac{\partial u}{\partial x} & 1 & 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial u} & -\frac{\partial f}{\partial v} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{-\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}}{1}$$

Subtema 4.8. Función implícita. Derivación implícita en sistemas de ecuaciones.

- Derivadas de la función implícita como soluciones de la o las ecuaciones lineales que resulten de igualar las diferenciales de ambos miembros de la ecuación original. Así, si se tiene originalmente la igualdad $F(x, y, z) = 0$, se obtiene la ecuación, siempre de primer grado:

$$F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = 0$$

que se resolvería para dx, dy o dz, según las parciales que se requiriesen.

Si se tiene originalmente el sistema:

$$F(x, y, z) = 0$$
$$G(x, y, z) = 0$$

se obtiene el sistema de ecuaciones, siempre lineales:

$$F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz = 0$$
$$G_x\, dx + G_y\, dy + G_z\, dz = 0$$

que se resolvería por la regla de Cramer y que da lugar a un cociente de jacobianos.

Sea $F(x, y, z) = 0$ donde $z = f(x, y)$

$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$ y $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

sustituyendo dz en dF se tiene

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = 0$$

factorizando dx y dy

$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = 0$

como $dx \neq 0$ y $dy \neq 0$, la única forma de que se cumpla la ecuación es que

$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

Derivación implícita en sistemas de ecuaciones.

$F(x, y, z) = 0$ donde $z = f(x, y)$

$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Sistemas de funciones implícitas

El conjunto de funciones

$$\begin{cases} \boldsymbol{F(x,y,z,u,v)=0} \\ \boldsymbol{G(x,y,z,u,v)=0} \\ \boldsymbol{H(x,y,z,u,v)=0} \end{cases}$$

conforman un sistema de funciones implícitas en el cual se definen tantas funciones implícitas como funciones en el sistema, es decir, de las cinco variables existentes se deben tener tres como dependientes y las restantes como independientes, esto es, si se definen a $\boldsymbol{z, u, v}$ **como variables dependientes, la variables restantes** $\boldsymbol{x, y}$ **deberán ser independientes, es decir** $\boldsymbol{z=z(x,y)}$; $\boldsymbol{u=u(x,y)}$; $\boldsymbol{v=v(x,y)}$
de las cuales será posible obtener $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ **en forma implícita.**

Sean las funciones diferenciables $\boldsymbol{F(x,y,z)=0}$ **,** $\boldsymbol{G(x,y,z)=0}$ **, donde** $\boldsymbol{z=z(x)}$ **y** $\boldsymbol{y=y(x)}$

diferenciando las funciones se tiene

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

$$dG=\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial z}dz=0$$

$$dy=\frac{dy}{dx}dx \quad ; \quad dz=\frac{dz}{dx}dx$$

Sustituyendo $\boldsymbol{dy}$ **y** $\boldsymbol{dz}$ **en** $\boldsymbol{dF}$ **y** $\boldsymbol{dG}$ **se obtiene**

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}dx\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{dz}{dx}dx\right) = 0$$
$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}dx\right) + \frac{\partial G}{\partial z}\left(\frac{dz}{dx}dx\right) = 0$$

factorizando dx

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right)dx = 0 \;\; ; \;\; dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right)dx = 0$$

como $dx \neq 0$ **, para que el sistema de se cumpla**

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$$
$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0$$

reordenando resulta

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$
$$\frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

REGLA DE CRAMER

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\;\;\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, y sea $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ su matriz de coeficientes .

Si $|A| \neq 0$ entonces la solución $x_k = \dfrac{|A_k|}{|A|}$ para $k = 1,2,\cdots,n$ donde la matriz $A_k = \lfloor c_{ij} \rfloor$ es tal que $c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}\,, & para\;\; j \neq k \\ b_i, & para\;\; j = k \end{cases}$

Derivada de sistemas de funciones implícitas

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{dx} = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

$$\frac{dy}{dx} = x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ -\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{J\left|\frac{F\,G}{x\,z}\right|}{J\left|\frac{F\,G}{y\,z}\right|}$$

sólo si $J\left|\frac{F,\ G}{y,\ z}\right| \neq \ \mathbf{0}$

Subtema 4.9. Concepto de gradiente. Operador nabla. Definición de derivada direccional. Interpretación geométrica y aplicaciones.

Se llama operador nabla a

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j \ en \ \mathbb{R}^2$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \ en \ \mathbb{R}^3$$

El vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel que contiene el punto P.

En R^3 nos proporciona la dirección de un vector perpendicular a la superficie en un punto, es decir, un vector normal al plano tangente en ese punto.

Algunas de sus aplicaciones son:

Derivada direccional

Sea la curva de intersección entre una superficie $z = f(x,y)$ y un plano vertical que forma un ángulo θ con la dirección positiva de eje x y que contiene al punto $P(x_0\ ,\ y_0,\ 0)$.

la ecuación del plano es $y - y_0 = \tan\theta\,(x - x_0)$

de donde

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{y - y_0}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{x - x_0}{\cos\theta} = t$$

$$x = x_0 + t\cos\theta \;\; ; \;\; y = y_0 + t\,sen\theta$$

como $ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\; dt$

$$ds = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (sen\theta)^2}\, dt$$

$$ds = dt$$

con lo que podemos decir que $s = t$

finalmente $\quad x = x_0 + s\cos\theta \;\; ; \;\; y = y_0 + s\,sen\theta$

$z = f(x, y)\,;\;\; x = x_0 + s\cos\theta \;\; ; \;\; y = y_0 + s\,sen\theta$

para obtener $\frac{dz}{ds}$ se puede plantear el sistema de funciones

$$\begin{cases} F(x,y,z,s) = z - f(x,y) = 0 \\ G(x,y,z,s) = x - x_0 - s\cos\theta = 0 \\ H(x,y,z,s) = y - y_0 - s\,sen\theta = 0 \end{cases}$$

donde si las variables x, y, z se definen como dependientes y la variable s como independiente se podrá obtener

$$\frac{dz}{ds} = -\frac{J\left|\dfrac{F,G,H}{x,y,s}\right|}{J\left|\dfrac{F,G,H}{x,y,z}\right|}$$

$$\frac{dz}{ds} = -\frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ 1 & 0 & -\cos\theta \\ 0 & 1 & -sen\theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial y} sen\theta}{1}$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} sen\theta$$

El valor máximo de la derivada direccional en un punto está dado por la dirección del gradiente, y el mínimo a la dirección perpendicular del gradiente.