SUCESIONES Y SERIES

Sucesión

Definición:
Es un conjunto ordenado de términos. Se representan mediante una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

Se expresa la función que genera a los términos de la sucesión como $f(n) = n$. Al término n se le denomina término enésimo.

Sucesión creciente

Son aquellas que cumplen con $\boxed{f(n+1) > f(n) \quad \forall\ n \in \mathrm{N}}$

Sucesión decreciente

Son las que cumplen la siguiente desigualdad $\boxed{f(n+1) < f(n)\ \forall\ n \in \mathrm{N}}$

Definición:
Toda sucesión creciente o decreciente es monótona.

SUCESIONES ACOTADAS

Cota superior de una sucesión

Es un número, que si existe, no es superado por ningún término de la sucesión
Si **Q** es cota superior de $\{f(n)\}$, entonces se cumple que

$$\boxed{f(n) \leq \mathrm{Q}\ \forall\ n \in \mathrm{N}}$$

Cota inferior de una sucesión

Es un número, que si existe, no es superior a cualquiera de los términos de la sucesión
Si **P** es cota inferior de $\{f(n)\}$, entonces se cumple que

$$\boxed{f(n) \geq \mathrm{P}\ \forall\ n \in \mathrm{N}}$$

Cuando una sucesión tiene cota superior y cota inferior se dice que está acotada.

TEOREMA:

Toda sucesión monótona y acotada tiene límite

TEOREMA:
Si una sucesión es convergente, su límite es único.

El límite de una sucesión se denota como:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(n) = \text{L}}$$

Definición:
Toda sucesión que tiene límite es convergente y a aquellas que no lo tienen, se les denomina divergentes.
Toda sucesión convergente es acotada.

TEOREMA de Weiestrass
Una sucesión creciente y acotada superiormente tiende a un límite, y una sucesión decreciente y acotada inferiormente tiende a un límite.

SERIES

Cuando se expresa la suma indicada de los términos de una sucesión de dice que se trata de una serie, así por ejemplo, la sucesión $\{n\}$ da origen a la serie $1+2+3+4+...+n+...$

Las series se pueden expresar de manera compacta empleando el símbolo Σ, así la serie mostrada arriba puede expresarse como $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

Definición:
Una serie es una expresión de la forma $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$ que de manera compacta se puede representar por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. En donde cada sumando se obtiene de los términos de la sucesión $\{a_n\}$.

Definición:
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie y sea $\{s_n\}$ la sucesión de sus sumas parciales definida por $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ tal que si existe el $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, se dice que la serie es **convergente** o que converge y su suma es el número S, denotada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Si por el contrario tal límite no existe, se dice que la serie es **divergente** o que diverge
.
TEOREMA:

SEA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; si la serie es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

TEOREMA:

SEA $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ la serie diverge.

A este Teorema le llaman algunos autores la prueba de la Divergencia.

TEOREMA:

EL carácter de una serie no cambia todos sus sumandos se multiplican por una constante cualquiera diferente de cero.

TEOREMA:

EL carácter de una serie no cambia si se le agregan o suprimen un número finito de términos al inicio de ésta.

TEOREMA:

EL carácter de una serie no cambia si sus sumandos se agrupan de cualquier manera.

TEOREMA:

SEA $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; y \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

I) si A y B son convergentes entonces

$A + B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ es convergente

II) Si A es convergente y B es divergente entonces

$A + B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ diverge

III) Si A es divergente y B es divergente entonces

$A + B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ puede ser convergente o divergente.

SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0, \; \forall \; n \in \mathbb{N}$

CRITERIOS PARA DETERMINAR EL CARÁCTER DE UNA SERIE

- **Criterio de comparación**

Definición:
Consiste en comparar los sumandos de una serie cuyo carácter se conoce, con los sumandos de otra cuyo carácter se desea determinar.

Teorema:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de estudio.

1) Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es una serie convergente y $a_n \leq c_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ entonces la serie en estudio también converge.
2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ es una serie divergente y $a_n \geq d_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ entonces la serie en estudio también Diverge.

- **Serie Armónica**

Es aquella que está representada por la suma de los recíprocos de los números naturales y tiene la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Según el criterio de comparación nos permite concluir que la serie armónica es divergente. Según Nicolás Oresme.

Es una serie que ha causado controversia entre varios matemáticos. Y todavía sigue.

https://www.teoria.com/es/referencia/a/armonicos.php
https://www.gaussianos.com/la-serie-armonica-y-la-serie-de-los-inversos-de-los-numeros-primos/

Serie Geométrica

Es aquella que tiene la forma:

$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{\,n-1}$ en donde a r se denomina razón.

De una serie geométrica, si:

- ✓ $|r| \geq 1$ la serie es divergente y no tiene suma
- ✓ $|r| < 1$ la serie es convergente y su suma es $\dfrac{a}{1-r}$

Se puede trabajar Si $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} ar^{n-2}$ puede haber corrimientos. No siempre empieza en 1.

Serie P

Es aquella que tiene la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$$

El carácter de este tipo de serie depende del valor de P:

- Si $P > 1$ la serie es convergente.
- Si $P \leq 1$ la serie es divergente.

Una serie p muy conocida es la llamada serie armónica en la que p es 1.

Criterio del cociente o de D'Alambert (Jean Le Ronde D'Alembert)

Recordar que $(n+1)! = (n+1)n!$

Ej:

$$\frac{3!}{2!} = \frac{1.2.3}{1.2} = 3 = n+1; \qquad \frac{2!}{3!} = \frac{1.2}{1.2.3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{n+1}$$

El criterio consiste en:

i) Obtener la razón de D'Alambert que es $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

ii) Calcular el límite de la razón $\lim\limits_{n\to\infty} r = L$

iii) Hacer la comparación

- Si $L > 1$ la serie es divergente

- Si $L = 1$ el criterio no decide
- Si $L < 1$ la serie es convergente
-

Criterio de Leibniz (Gottfied Wilhelm Leibniz 1646-1716)

Teorema: Sea la serie de signos alternados

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,\; a_n > 0$$

Puede comenzar en 0.

La serie converge si

$i)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$ii)\ a_n > a_{n+1}$

Series de Potencias

Una serie de potencias es una expresión de la forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

En forma general.

$$\boxed{a_n = \frac{f^n(0)}{n!}}$$

Si sustituimos los coeficientes identificados en la igualdad se convierte en:

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{2!}x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Se reduce

$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n}$ suponiendo que $f^0(0) = f(0)$

entonces

$$\boxed{f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n}$$

Serie de Taylor

Sea la serie de potencias de la forma

$$b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + \ldots$$

Supongamos la existencia de una función f tal que cumpla la igualdad

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots \quad + b_n(x-a)^n + \ldots$$

Es importante que los coeficientes b_n tengan la forma

$$b_n = \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Para la igualdad.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$, se reduce a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

A esta expresión se conoce como **Serie de Taylor (Brook Taylor 1635-1731)**, sirve lo mismo que la serie de Maclaurin, para representar funciones en términos de una serie de potencias a partir de un valor $\boxed{x = a}$.

Al comparar la serie de Maclaurin con la de Taylor, vemos que aquella es un caso especial de ésta, o bien, que Taylor es la generalización de Maclaurin.

Intervalo de convergencia

Es aquel conjunto de calores de x que hacen que una serie de potencias sea convergente, para su obtención se emplea el criterio del cociente visto anteriormente.