Integración Por partes

Deducción de la fórmula

Sea u y v funciones, la fórmula de diferenciación para el producto de u por v es:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Despejando udv

$$udv = d(uv) - vdu$$

Integrando se obtiene la fórmula de integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Donde:

1) u es una función fácil de derivar
2) dv es una función fácil de integrar
3) $\int vdu$ es más sencilla que la integral inicial.

Integrales de las formas:

- Algebraicas por trigonométricas
- Algebraicas por exponenciales
- Exponenciales por trigonométricas
- Logarítmicas
- Logarítmicas por algebraicas
- Funciones trigonométricas inversas
- Funciones trigonométricas inversas por algebraicas.

Realizar las siguientes integrales

- $\int xe^x dx$
- $\int \ln x dx$
- $\int x^2 sen(2x) dx$
- $\int e^x senx\, dx$

Integración por Fracciones Parciales

El método de fracciones parciales se utiliza cuando quiere integrarse una expresión de la forma $\frac{Q(x)}{P(x)}$, donde el numerador y el denominador son polinomios y el grado de Q(x) es mayor o igual que el grado de P(x), debe utilizarse el algoritmo de la división.

Por el teorema fundamental del álgebra se sabe el polinomio P(x) puede fraccionarse en polinomios irreducibles de grado uno y de grado dos (un polinomio de grado dos es irreducible si no tiene raíces reales). Entonces se tienen cuatro casos.

Caso 1(Raíces reales, ninguna de ellas repetidas)

P(x) se factoriza como un producto de factores de grado uno distintos; es decir, $P(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_nx + b_n)$ Entonces existen números reales $A_1, A_2, \dots, A_n$ tal que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} + \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(a_nx + b_n)}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \int \frac{A_1}{(a_1x + b_1)} dx + \int \frac{A_2}{(a_2x + b_2)} dx + \cdots + \int \frac{A_n}{(a_nx + b_n)} dx$$

Caso 2 (Raíces reales repetidas)

P(x) se factoriza como un producto de factores de grado uno todos repetidos; es decir, $P(x) = (ax + b)^n$ Entonces existen números reales $A_1, A_2, \dots, A_n$ tal que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(ax + b)} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \int \frac{A_1}{(ax + b)} dx + \int \frac{A_2}{(ax + b)^2} dx + \cdots + \int \frac{A_n}{(ax + b)^n} dx$$

Caso 3(Raíces complejas todas distintas)

P(x) se factiriza como un producto de factores irreducible de grado dos todos distintos; es decir, $P(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \dots\ (a_nx^2 + b_nx + c_n)$ Entonces existen números reales $A_1, A_2, \dots, A_n$ y $B_1, B_2, \dots, B_n$ tal que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)} + \frac{A_2x + B_2}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)} + \ \dots + \frac{A_nx + B_n}{(a_nx^2 + b_nx + c_n)}$$

Por lo que

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \int \frac{A_1x + B_1}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)} dx + \int \frac{A_2x + B_2}{(a_2x^2 + b_2x + c_2)} dx + \ \dots + \int \frac{A_nx + B_n}{(a_nx^2 + b_nx + c_n)} dx$$

Caso 4 (Raíces complejas repetidas)

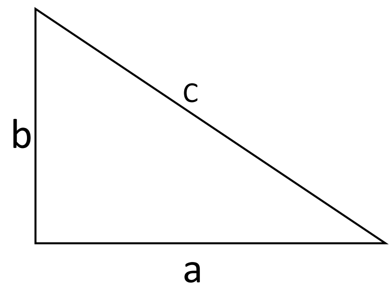
P(x) se factoriza como un producto de factores irreducibles de grado dos todos repetidos; es decir, $P(x) = (ax^2 + bx + c)^n$ Entonces existen números reales $A_1, A_2, \dots, A_n$ y $B_1, B_2, \dots, B_n$ tal que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ \dots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Por lo que

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \int \frac{A_1x + B_1}{(ax^2 + bx + c)} dx + \int \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} dx + \ \dots + \int \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$$

Método de Integración por Sustitución Trigonométrica

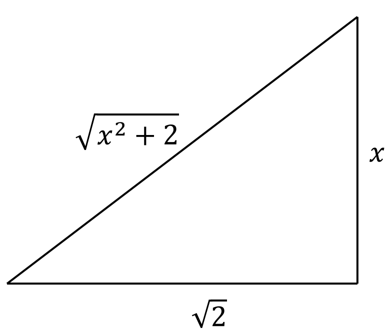


Por el teorema de Pitágoras aplicando al triangulo anterior.

$$a^2 + b^2 = c^2 \implies \begin{cases} c = \sqrt{a^2 + b^2} \\ a = \sqrt{c^2 - b^2} \\ b = \sqrt{c^2 - a^2} \end{cases}$$

Caso 1

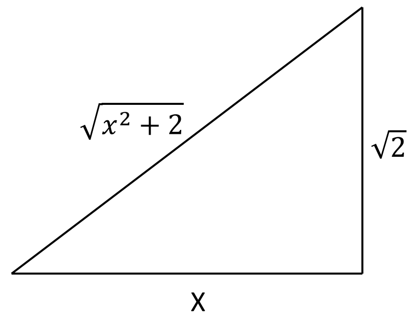
En $\sqrt{x^2+2} = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$, hay una suma de cuadrados, y se interpreta geométricamente como la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden $x \; y \; \sqrt{2}$



En este caso

$$\tan \emptyset = \frac{x}{\sqrt{2}} \implies x = \sqrt{2} tan\emptyset$$

$$\sec \emptyset = \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{x^2+2} = \sqrt{2} sec\emptyset$$



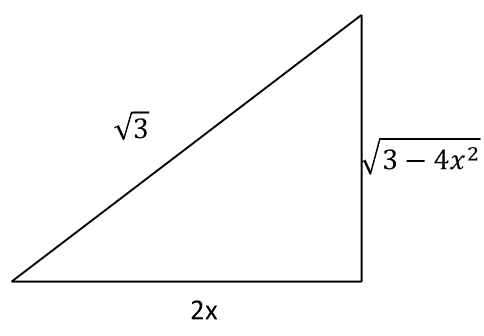
En este caso

$$\cot \emptyset = \frac{x}{\sqrt{2}} \Longrightarrow x = \sqrt{2}cot\emptyset$$

$$csc\emptyset = \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{x^2+2} = \sqrt{2}csc\emptyset$$

Caso 2

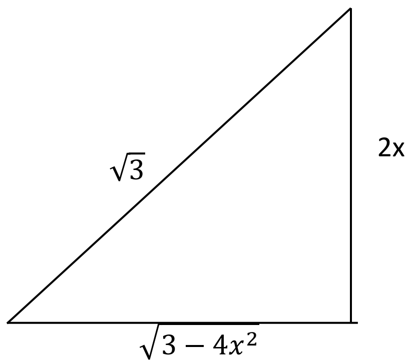
En $\sqrt{3-4x^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - (2x)^2}$, hay una diferencia de cuadrados



En este caso

$$cos\emptyset = \frac{2x}{\sqrt{3}} \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\emptyset$$

$$sen\,\emptyset = \frac{\sqrt{3-4x^2}}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \sqrt{3-4x^2} = \sqrt{3}sen\emptyset$$



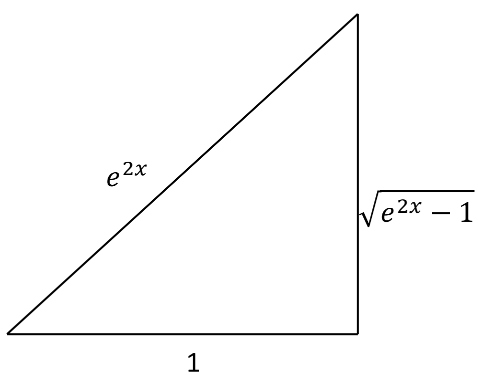
En este caso

$$sen\emptyset = \frac{2x}{\sqrt{3}} \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} sen\emptyset$$

$$cos\ \emptyset = \frac{\sqrt{3-4x^2}}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \sqrt{3-4x^2} = \sqrt{3}cos\emptyset$$

Caso 3

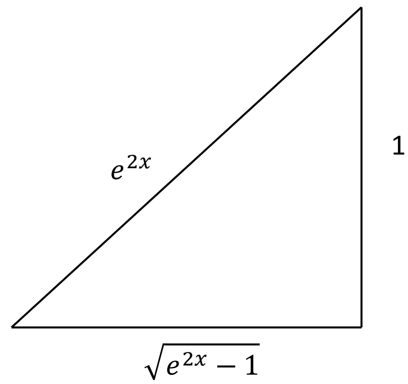
En $\sqrt{e^{2x}-1} = \sqrt{(e^x)^2 - 1^2}$ hay una diferencia de cuadrados



En este caso

$$sec\emptyset = \frac{e^x}{1} \Longrightarrow x = \ln(sec\ \emptyset)$$

$$tan\ \emptyset = \frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{1} \Longrightarrow \sqrt{e^{2x}-1} = tan\emptyset$$



En este caso

$$csc\emptyset = \frac{e^{x}}{1} \Longrightarrow x = \ln(csc\,\emptyset)$$

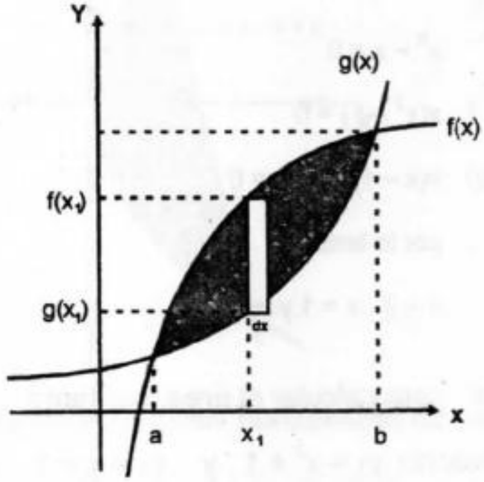
$$cot\,\emptyset = \frac{\sqrt{e^{2x}-1}}{1} \Longrightarrow \sqrt{e^{2x}-1} = cot\emptyset$$

Área entre curvas planas

Área entre dos curvas

Rectángulos de base dx

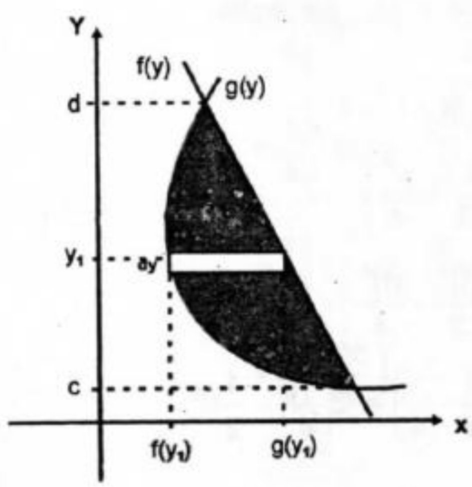
El área comprendida entre las curvas f(x) y g(x), tomando rectángulos de base dx, está definida como:



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Rectángulos de base dy

El área comprendida entre las curvas f(y) y g(y), tomando rectángulos de base dy, se define como:



$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

Es conveniente bosquejar las gráficas de las funciones para determinar de la fórmula que se debe utilizar.

Sólidos de revolución

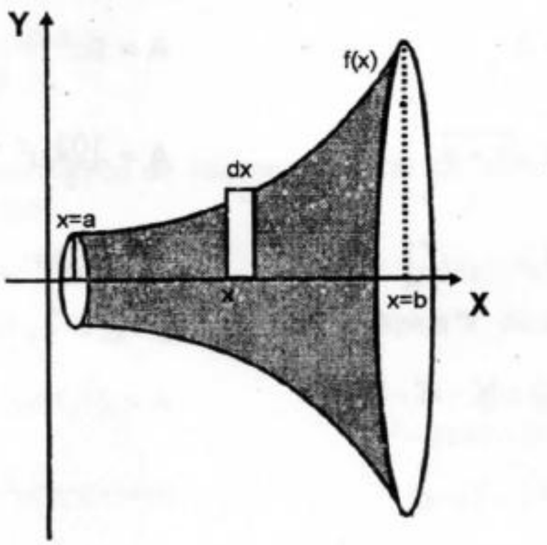
Definición

Se genera al girar un área plana en torno a una recta conocida como eje de rotación o revolución. Para calcular un volumen se puede utilizar cualquiera de los siguientes métodos.

Método de discos

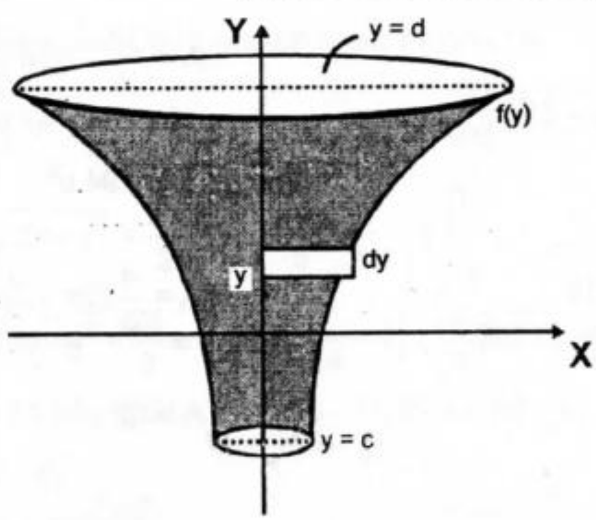
Este método es utilizado cuando el eje de rotación forma parte del contorno del área plana.

Eje de rotación el eje X



$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Eje de rotación el eje Y

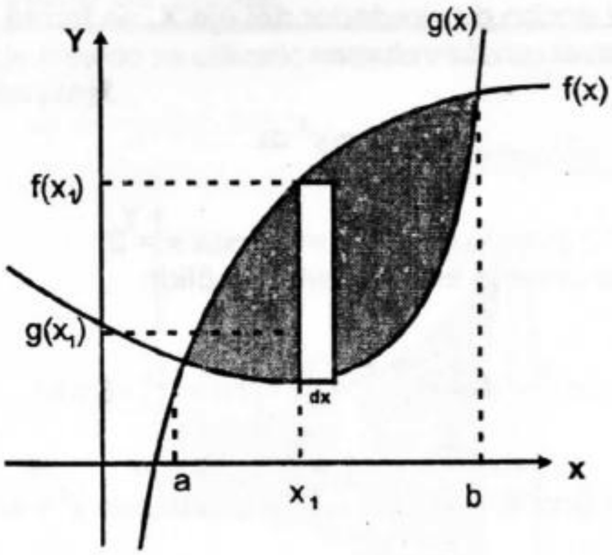


$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy$$

Método de las arandelas

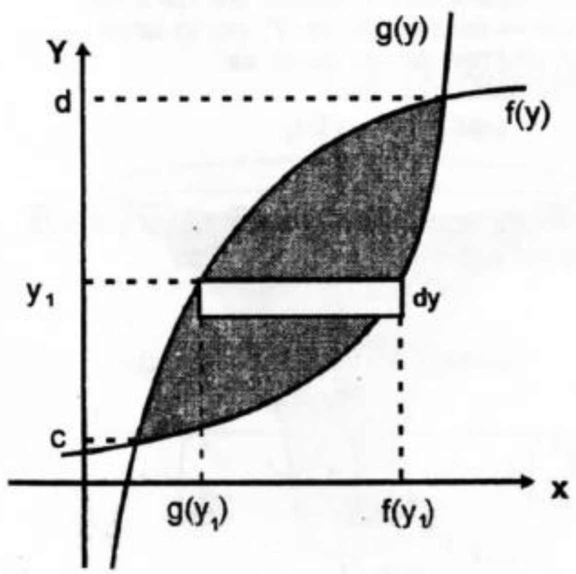
Este método se emplea cuando el eje de rotación no es parte del contorno del área limitada por las curvas.

Eje de rotación horizontal



$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$$

Eje de rotación vertical



$$V = \pi \int_c^d \left([f(y)]^2 - [g(y)]^2 \right) dy$$

Ejemplos

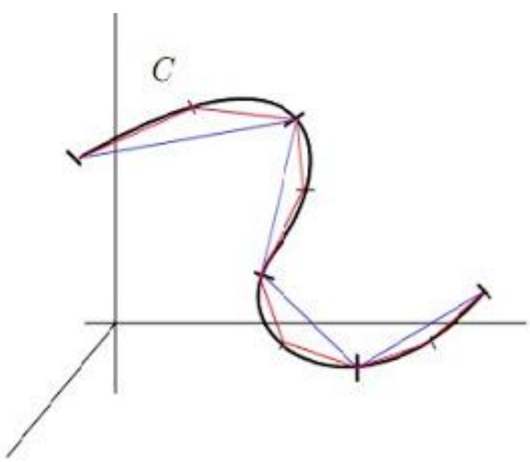
1) Encuentre el volumen del solido formado al girar por
   $f(x) = 2 - x^2 \;\; y \;\; g(x) = 1 \; al \;\; rededor \;\; de \;\; la \;\; recta \;\; y = 1$.
2) Encuentre el volumen del solido formado al girar la región acotada por las gráficas
   $y = \sqrt{x} \;\; y \;\; y = x^2$ alrededor del eje x.

Longitud de Arco

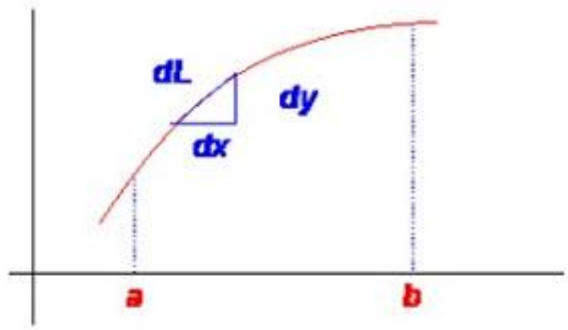
La longitud de arco de una curva, también llamada rectificación de una curva, es la medida de la distancia o *camino recorrido* a lo largo de una curva o dimensión lineal. Históricamente, ha sido difícil determinar esta longitud en segmentos irregulares; aunque fueron usados varios métodos para curvas específicas, la llegada del cálculo trajo consigo la fórmula general para obtener soluciones cerradas para algunos casos.

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

La longitud de una curva plana se puede aproximar al sumar pequeños segmentos de recta que se ajusten a la curva, esta aproximación será más ajustada entre más segmentos sean y a la vez sean lo más pequeño posible. , escogiendo una familia finita de puntos en C, y aproximar la longitud mediante la longitud de la poligonal que pasa por dichos puntos.Cuantos más puntos escojamos en C, mejor seria el valor obtenido como aproximación de la longitud de C.



Si la primera derivada de una función es continua en [a,b] se dice que es suave y su gráfica es una curva suave.



Cuando la curva es suave, la longitud de cada pequeño segmentos de recta se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras

$$(\mathrm{dL})^2 = (\mathrm{dx})^2 + (\mathrm{dy})^2$$

Si f es suave en [a,b], la longitud de la curva de f(x) desde a hasta b es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$y = f(x)$	$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$
X=f(y)	$L = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dx$
X(t) ; Y(t)	$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dx$
polares	$L = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\left(f(\phi)'\right)^2 + \left(f(\phi)\right)^2}\, dx$

Ecuaciones diferenciales de primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden es una relación de la forma:

$$G\left(x, y, y^{\prime}\right)=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \;\; ó \quad \frac{dy}{dx}=F(x, y)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Si $F(x, y)=f(x)g(x)\ldots\ldots\ldots(3)$ entonces la ecuación (2) se llama ecuación diferencial de variables separables y la solución se obtiene, primero separando las variables y después integrando.

$$\frac{dy}{dx}=F(x, y)$$

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$