Función Logaritmo y exponencial

Función logaritmo natural

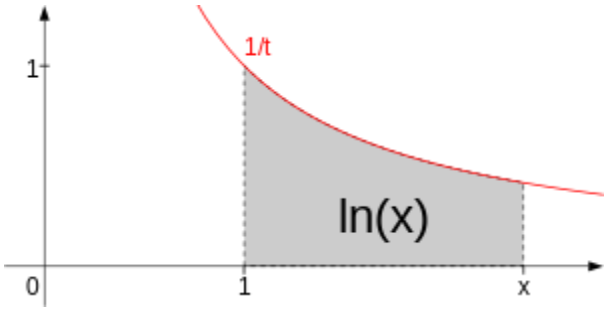
En términos matemáticos la función logaritmo natural es una herramienta de mayor utilidad que el logaritmo del álgebra elemental, el cual está definido en términos de exponentes: $log_b x$ es un número n tal que $b^n = x$, donde b es llamada la base. La potencia. La potencia b^n está definida, sin embargo, solamente para valores racionales de n; su gráfica entonces está llena de *agujeros y no es derivable ni integrable.*

Por otro lado, la función logaritmo natural, además de tener las mismas propiedades del logaritmo elemental, es diferenciable e integrable, ya que en su intervalo de definición (0,∞), es continua y está representada por una sola regla de correspondencia.

Definición

La función logaritmo natural denotada como ln se define de la siguiente forma.

$$ln = \int_1^x \frac{dt}{t}$$



Características de la función ln

- Dominio (0, ∞)
- Rango (- ∞, ∞)
- Biyectiva
- Su derivada $\frac{1}{x}$
- Su función inversa e^x

Teorema

Si a y b son números positivos, entonces

$$\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln b - \ln a$$

Propiedades de la función logaritmo natural

Si a y b son números positivos y r cualquier número, entonces.

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln ab = \ln a + \ln b$
3. $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
4. $\ln a^r = r \ln a$

Derivada de la función logaritmo natural

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

Si u=u(x) es una función derivable, entonces;

$$\frac{d}{dx} \ln|u| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Si u=u(x) y v=v(x) son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx} u^V = u^v \left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln x \ \frac{dv}{dx}\right)$$

Ejemplo $\frac{d}{dx} x^{sen\, x} = x^{sen\, x} \left(\frac{sen\, x}{x} + \ln x \ cosx\right)$

Obtener las siguientes derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = \ln|1 - x^3|$
b) $f(x) = ln \left|\frac{x-1}{x-2}\right|$
c) $f(x) = ln|g(x)|$
d) $f(x) = (x-2)^7(x+3)^4(x-4)^3(x+5)^2$

Derivación logarítmica

En ocasiones una función, tiene una expresión algebraica muy complicada, Para obtener la derivada de dicha función, podemos utilizar un método indirecto, el cual llamaremos derivación logarítmica, la cual consiste en aplicar el logaritmo natural a la función, utilizando propiedades de los logaritmos y derivar en forma implícita de la siguiente forma.

$$y = f(x)$$

$$\ln y = \ln f(x)$$

$$\frac{d \ln y}{dx} = \frac{d \ln f(x)}{dx}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{d \ln f(x)}{dx}$$

$$y' = \frac{d \ln f(x)}{dx}\, y$$

Ejemplo

$$f(x) = (x-2)^7 (x+3)^4 (x-4)^3 (x+5)^2$$

Se obtiene logaritmo natural de ambos lados

$$\ln f(x) = \ln[(x-2)^7 (x+3)^4 (x-4)^3 (x+5)^2]$$

Se aplican todas las propiedades de los logaritmos

$$\ln f(x) = 7\ln(x-2) + 4\ln(x+3) + 3\ln(x-4) + 2\ln(x+5)$$

Se obtiene la derivada de ambos lados

$$\frac{d \ln f(x)}{dx} = 7\frac{d \ln(x-2)}{dx} + 4\,\frac{d \ln(x+3)}{dx} + 3\,\frac{d \ln(x-4)}{dx} + 2\,\frac{d \ln(x+5)}{dx}$$

$$\frac{f(x)'}{f(x)} = \frac{7}{x-2} + \frac{4}{x+3} + \frac{3}{x-4} + \frac{2}{x+5}$$

`Finalmente

$$f(x)' = \left[\frac{7}{x-2} + \frac{4}{x+3} + \frac{3}{x-4} + \frac{2}{x+5}\right](x-7)^7 (x+3)^4 (x-4)^3 (x+5)^2$$

Ejercicios

Obtener las derivadas de las siguientes funciones

1) $h(x) = \frac{\sqrt{(x-2)(x+4)}}{(x+3)^{7/5}}$
2) $f(x) = X^X$
3) $w(x) = \tan x$
4) $j(x) = \sqrt{4x+7}(x-5)^3$
5) $q(x) = \sqrt{(3x^2+2)\sqrt{6x-7}}$
6) $g(x) = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{sen\, x}$

La integral de una función logaritmo natural

$$\int \frac{du}{u} = \ln|x| + c$$

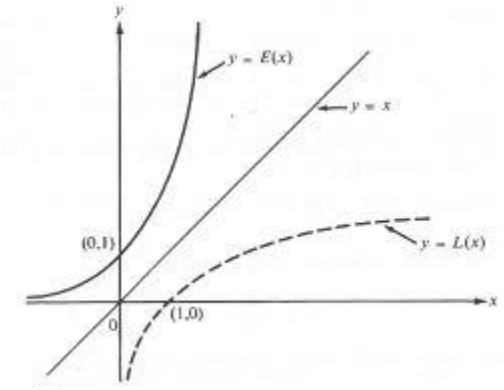
Ejercicios

a) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{x^2+1}$
b) $\int \cot x\, dx$
c) $\int_1^2 \frac{x^2\, dx}{x+3}$
d) $\int \frac{ln\, x^2\, dx}{x}$

Función exponencial natural

Teorema

Si f(x)= ln x y g es la inversa de f, entonces g(x)=e^x



Definición

La función $g(x) = e^x$, inversa de f(x)=ln x, es la función exponencial natural o, simplemente, la función exponencial.

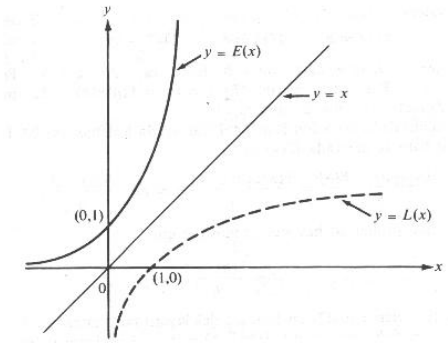
Corolario

1. $\ln e^u = u$
2. $e^{\ln v} = v$
3. $v = e^u \Leftrightarrow \ln v = u$

Propiedades

- $e^a e^b = e^{a+b}$
- $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- $(e^a)^n = e^{na}$
- $e^0 = 1$

Limites de la función exponencial



1. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\alpha$

Derivada de la función exponencial

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Si u=u(x) es una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u.\frac{du}{dx}$$

Encuentre la derivada de f(x) en cada uno de los siguientes funciones

- $f(x) = e^{-2x}\ln x$
- $h(x) = \sqrt{e^{2x} + 2x}$
- $xe^y + 2x - \ln(y-1) = 3$
- $w(x) = e^{x ln\, x}$
- $e^{xy} - x^3 + 3y^2 = 1$
- $xe^y - ye^x = 2$

La integral de una función exponencial

$$\int e^u du = e^u + c$$

Realizar las siguientes integrales

- $\int \frac{e^{3/x}}{x^2} dx$
- $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$
- $\int \frac{x}{3x^2-5} dx$
- $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

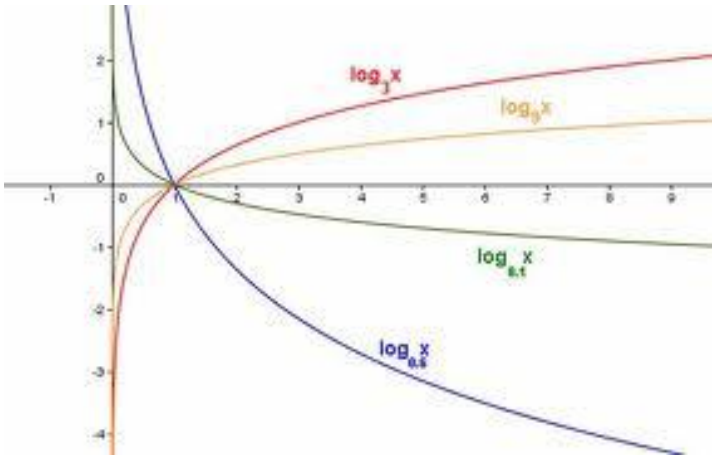
- $\int e^{sen\,x} \cos x \, dx$
- $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, dx$
- $\int \frac{dx}{1+e^x}$

Función exponencial base a

Si a es número positivo y x es un número real, entonces

$$f(x) = a^x$$

Define a la función exponencial de base a.



Teorema

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & si \;\; a > 1 \\ 1 & si \;\; a = 1 \\ +\infty & si \; 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & si \;\; a > 1 \\ 1 & si \;\; a = 1 \\ 0 & si \; 0 < a < 1 \end{cases}$$

Derivación e Integración de una función elevada a otra función

Podemos partir de

$$y = b^x$$

$$\ln y = x ln\ b$$

$$e^{\ln y} = e^{x ln\ b}$$

$$y = e^{x ln\ b}$$

Teorema

Si a es un número positivo, entonces $\frac{d}{dx} a^u = (\ln a) a^u$

Teorema

Si a es un número positivo y u=u(x) es una función diferenciable, entonces.

$$\frac{d}{dx} a^u = (\ln a) a^u . \frac{du}{dx}$$

Teorema

Si a es un número positivo distinto de 1, entonces

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln u} + c$$

Ejercicio

Obtener las derivadas de las siguientes funciones

- $y = 3^{\sqrt{x}}$
- $y = 2^x$
- $y = 4^{3x^2}$

Calcular las siguientes integrales

- $\int 2^x 3^x dx$
- $\int \left(3^{x^4-2x}\right)(2x^3-1)dx$
- $\int \frac{4^x 2^x}{\sqrt{1+8^x}}\, dx$

Definición

Si a es un número positivo distinto de 1, la inversa f^{-1} de $f(x)=a^x$, denotada como $\log_a$, se llama la función logaritmo de base a y se defines así.

$$log_a\, x = y \quad \Leftrightarrow\ a^y = x$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Cambio de base

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a}$$

Teorema

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

Teorema

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}$$

Calcular las siguientes derivadas

- $\frac{d}{dx}\log_3 \sqrt{x}$

- $\frac{d}{dx}(\log_{10} x)^x$
- $\frac{d}{dx}(x^2+2)^{\log_{1/2} x}$
- $\frac{d}{dx}\log_5(x+1)^x$

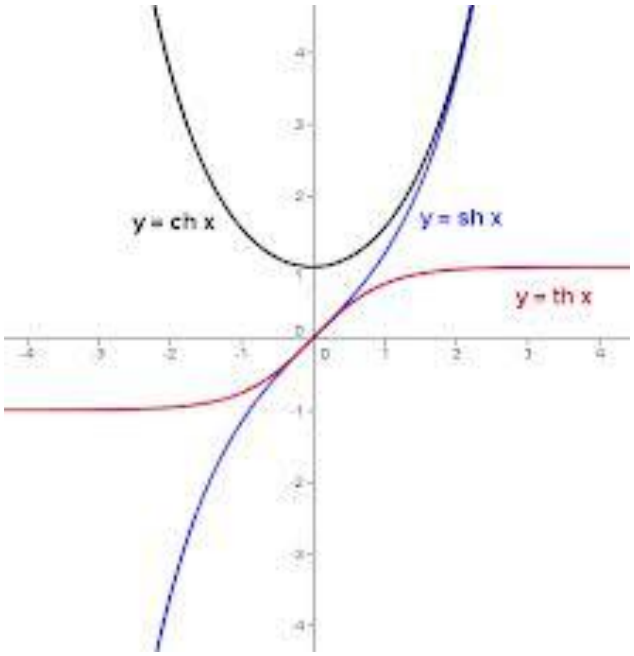
Funciones Hiperbólicas

Hay funciones definidas mediante la suma o la diferencia de funciones exponenciales, las cuales se aplican frecuentemente, por lo que se les ha dado un nombre.

Definición

Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico denotadas como senh y cosh se definen como sigue:

$$senh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$\tanh x = \frac{senh\ x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ Tangente hiperbólica

$$\coth x = \frac{\cosh x}{senh\ x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$ Cotangente hiperbólica

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$ Secante hiperbólica

$$csch\ x = \frac{1}{senh\ x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$ Cosecante hiperbólica

Verificar las siguientes identidades

a) $\cosh x^2 - senh\ x^2 = 1$
b) $1 - \tanh x^2 = \operatorname{sech} x^2$
c) $\coth x^2 - 1 = \operatorname{csch} x^2$
d) $\cosh x + senh\ x = e^x$
e) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + senh\ x\ senh\ y$

Formulas de derivación para funciones hiperbólicas

f(x)	$\frac{df(x)}{dx}$
Cosh x	Senh x
Senh x	Cosh x
Tanh x	$Sech^2$ x
- Sech x tanh x	Cot x
coth x	- $Csch^2$ x
Csch x	-csc hx coth x

Obtener la derivada de las siguientes funciones

- $f(x) = xcsch\ e^{4x}$
- $f(x) = senh\ (x^2 + 1)$
- $f(x) = \sqrt{x}\tanh\sqrt{x}$

Integración de funciones hiperbólicas

1.4. Funciones hiperbólicas

$$(91) \quad \int \operatorname{senh} ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C$$

$$(92) \quad \int \operatorname{senh}^2 x dx = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2x - \frac{1}{2} x + C$$

$$(93) \quad \int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{senh} ax + C$$

$$(94) \quad \int \cosh^2 x dx = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2x + \frac{1}{2} x + C$$

$$(95) \quad \int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln |\cosh ax| + C$$

$$(96)\quad \int \coth ax dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{senh} ax| + C$$

$$(97)\quad \int \operatorname{sech} x dx = \arctan(\operatorname{senh} x) + C$$

$$(98)\quad \int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$$

$$(99)\quad \int \operatorname{csch} x dx = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| = -\frac{1}{2}\ln\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1} + C$$

$$(100)\quad \int \operatorname{senh} x \cdot \tanh x \cdot dx = -\operatorname{sech} x + C$$

$$(101)\quad \int \operatorname{csch} x \cdot \coth x \cdot dx = -\operatorname{csch} x + C$$

1.4.1. funciones hiperbólicas inversas

$$(102)\quad \int \operatorname{arcsenh}\frac{x}{a} dx = x\ \operatorname{arcsenh}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 + x^2} + C, \quad a > 0$$

$$(103)\quad \int \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} dx = \begin{cases} x\ \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2} + C, & \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} > 0, a > 0; \\ x\ \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} + \sqrt{x^2 - a^2} + C, & \operatorname{arccosh}\frac{x}{a} < 0, a > 0; \end{cases}$$

$$(104)\quad \int \operatorname{arctanh}\frac{x}{a} dx = x\ \operatorname{arctanh}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}a\ln(a^2 - x^2) + C$$

$$(105)\quad \int \operatorname{arccoth}\frac{x}{a} dx = x\ \operatorname{arccoth}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}a\ln(x^2 - a^2) + C$$

$$(106)\quad \int \operatorname{arcsenh}\frac{x}{a} dx = x\ \operatorname{arcsech}\frac{x}{a} - a\ \operatorname{arc\,sen}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C$$

$$(107)\ \int \operatorname{arcsech}\frac{x}{a}dx = x\ \operatorname{arccsch}\frac{x}{a} + a\ \operatorname{arccosh}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} + C$$

Resolver las siguientes integrales

1. $\int \frac{senh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$
2. $\int \frac{sech^2 x}{1-2\tanh x}\ dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$

Regla de L'Hopital Formas indeterminadas

Cuando una función y=f(x) toma una de las siguientes formas para un determinado valor de x.

$$f(x) = \frac{0}{0}\ , \frac{\infty}{\infty}\ , (0)(\infty), \infty - \infty\ , 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

Se dice que la función toma forma indeterminada.

Como ya se estudio el cálculo de limites, cuando resultaba $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ se vieron varios casos en los cuales se mostro la forma de eliminar dicha indeterminación por

Este tipo de indeterminaciones se tendrá que hacer uso de la regla de L ' Hopital para que se pueda obtener de manera más sencilla el calculo del limite.

Teorema Regla de L'Hopital

a) Sean f(x) y g(x), dos funciones derivables en el intervalo abierto I, excepto posiblemente en el número **a** que pertenece a I.
b) Para toda x diferente a a en I y g'(x) diferente de cero.
c) $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$
d) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Por lo tanto se cumple

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Es importante mencionar que la regla de L'Hopital, sólo es aplicable cuando se presentan las formas indeterminadas de $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

Determinación del valor de la forma $(0)(\infty)$

Si una función F(x) considerada como el producto de dos funciones. F(x)=f(x)g(x), toma la forma indeterminada $(0)(\infty)$, para valores de x, la función dada puede escribirse en la forma.

$$F(x) = f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Esto se hace con el objetivo de poder aplicar la regla de L'Hopital

Ejemplo

$$\lim_{x\to 0^+} xlnx$$

Determinación de la forma $\infty - \infty$

Si una función F(x), considerada como la diferencia de dos funciones F(x)=f(x)-g(x), toma la forma indeterminada $\infty - \infty$ para valores de x, en general es posible transformarla en una fracción que tome la forma $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, mediante algún procedimiento algebraico, y de esta manera, es posible aplicar la regla de L'Hopital y encontrar un valor determinado.

Ejemplo: $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x \ln x - x + 1}{x \ln x - \ln x}\right) \left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Aplicando dos veces la regla de L'Hospital obtenemos:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x \ln x - x + 1}{x \ln x - \ln x}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Determinación del valor de la forma $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Para poder determinar que permita eliminar la indeterminación para cualquier de las tres formas anteriores se emplea el siguiente procedimiento.

Sea la función

$$F(x) = f(x)^{g(x)}$$

Tomando logaritmos naturales en ambos lados miembros de la expresión y aplicando propiedades de los logaritmos se obtiene:

$$LnF(x) = g(x)Lnf(x)$$

Por lo que en cada uno de los casos anteriores, el logaritmo natural de la función F(x), tomara la forma indeterminada $(0)(\infty)$. De esta manera, determinando el valor de esta forma por el procedimiento correspondiente, se obtiene el límite del logaritmo de la función F(x).

De tal forma que, si el límite toma el valor a, es decir:

$$\lim_{x \to x0} LnF(x) = a$$

$$\lim_{x \to x0} F(x) = e^{a}$$

3) Además de la regla de L'Hospital para calcular los límites indeterminados se emplea el desarrollo de funciones en serie de Taylor. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{6}.$$

Teorema de Taylor

Sea f(x) una función continua en el intervalo I (n-veces derivable) y sea a que pertenezca a dicho intervalo, entonces f(x) se puede expresar en un serie de polinomios alrededor de a como:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i f(x)}{dx^i} \Big|_{x=a} (x - a)^i$$

Si a=0, la serie se denomina serie de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i f(x)}{dx^i} \Big|_{x=0} x^i$$

Ejemplo

Calcular la serie de Taylor alrededor de a=0 de f(x)=senx

$$senx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{d^i senx}{dx^i} \Big|_{x=0} x^i$$

$f^0(0) = sen(0) = 0$
$f^l(0) = cos(0) = 1$
$f^{ii}(0) = -sen(0) = 0$
$f^{iii}(0) = -cos(0) = -1$
$f^{iv}(0) = sen(0) = 0$
$f^v(0) = cos(0) = 1$
$f^{vi}(0) = -sen(0) = 0$
$f^{vii}(0) = -cos(0) = -1$

$$senx = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 \dots \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

Calcular la serie de Taylor alrededor de a=0 de las siguientes funciones

- $f(x) = \ln(x+1)$
- $f(x) = \sqrt{1+x}$
- $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

Integrales Impropias

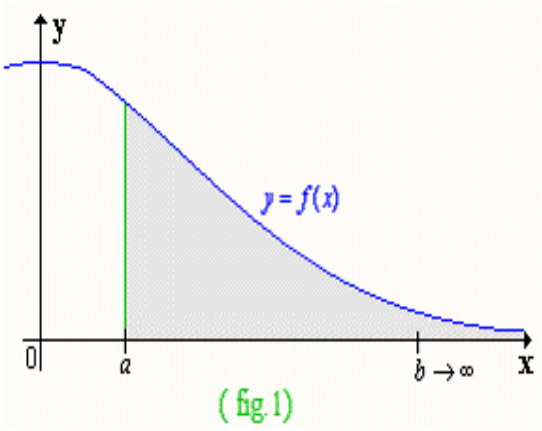
Definición1:

(i) Si f es continua $\forall x \geq a$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

si el límite existe.

Observe la fig.1.



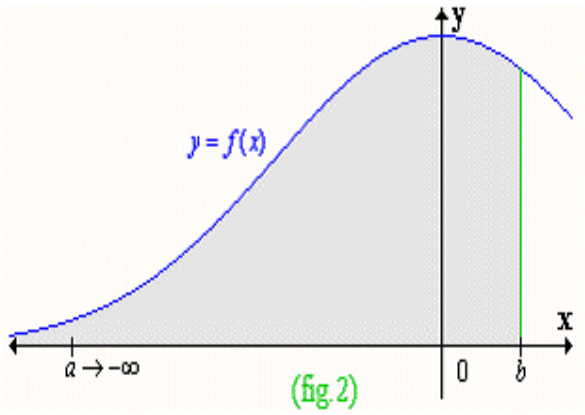
(fig.1)

(ii) Si f es continua $\forall x \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

si el límite existe.

Observe la fig.2.



(fig.2)

Definición2:

Si f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, y $c \in \mathbb{R}$; entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Definición3:

(i) Si f es continua $\forall x \in (a, b]$, y $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$; entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_{t}^{b} f(x)dx$$

si el límite existe.

(ii) Si f es continua $\forall x \in [a, b)$, y $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$; entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_{a}^{t} f(x)dx$$

si el límite existe.

Definición4:

Si f es continua en todo número de $[a, b]$, excepto en c y $a < c < b$, y si además $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$,

entonces

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_{a}^{t} f(x)dx + \lim_{s \to c^+} \int_{s}^{b} f(x)dx$$

si los límites del miembro derecho existen.

Cuando los límites de las definiciones anteriores existen, se dice que las integrales son convergentes en caso contrario, se dice que son divergentes