Estado No Estacionario

(Con gradientes. Cilíndricas)

Objetivos

1. Conocer las ecuaciones a las que se llega al separar las variables en geometrías cilíndrica y esférica.
2. Conocer la manera de encontrar soluciones a la ecuación de Bessel
3. Entender la relación entre las condiciones a la frontera y el tipo de función que es solución de la ecuación.
4. Operar el libro de Excel con el que se obtienen las soluciones.

Lo general

La ecuación de difusión describe la conducción de calor en estado no estacionario, cuando no hay fuentes de generación de calor.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

Donde α, la difusividad térmica, es el cociente k/ρC

Lo particular

Esta ecuación representa una gran familia de fenómenos, para aplicarla a la solución de un caso particular es necesario fijar la geometría y las condiciones de frontera que lo describen.

El Laplaciano se escribe de diferentes formas de acuerdo con los sistemas de coordenadas

Cartesianas 3D

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

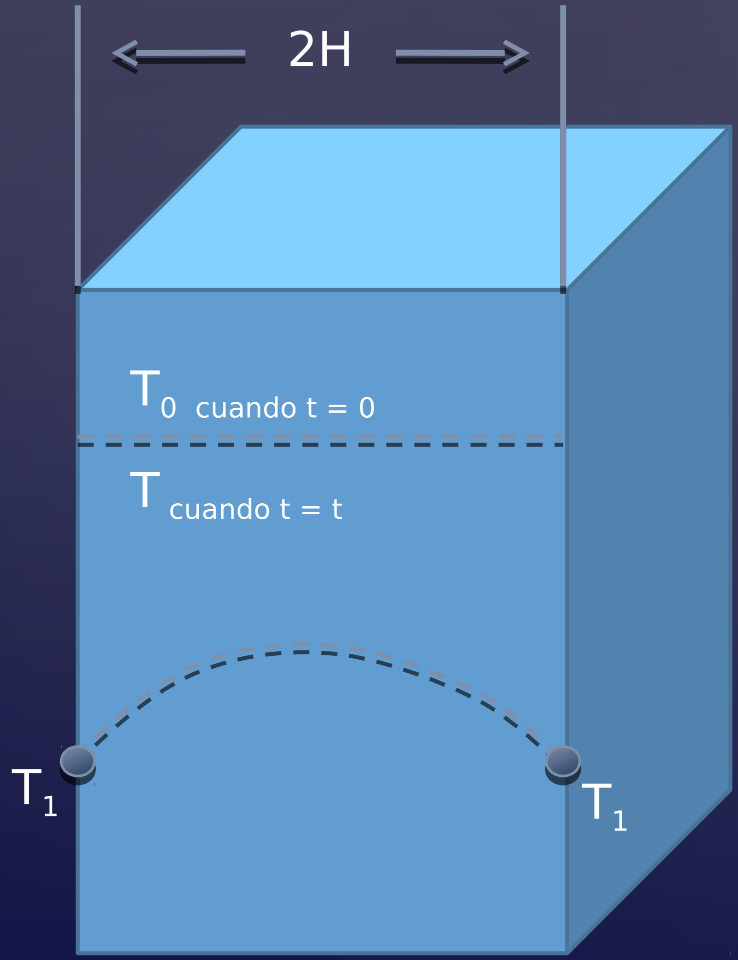
Cilíndricas

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right)$$

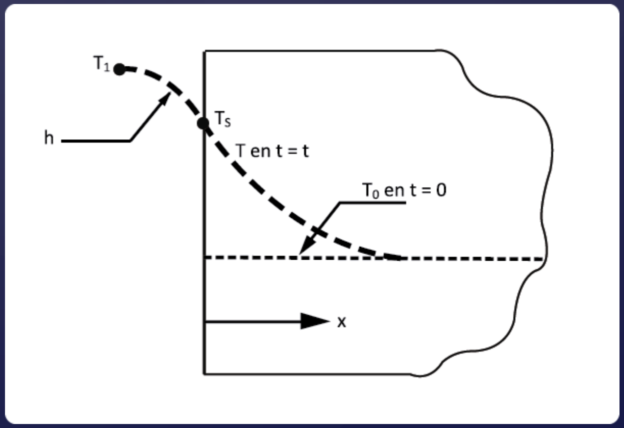
Esféricas

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

La clase anterior.



Geometría Cartesiana



La solución de la placa de espesor 2H

$\mathrm{T(x,t)} = \tau(t)\,\mathrm{X(x)}$ Se obtuvo por el método de la separación de variables.

La solución tiene dos factores, uno exponencial $\tau(t) = e^{-a^2 \alpha t}$

y otro, una suma de senos y cosenos (Series de Fourier) con diferentes frecuencias $\mathrm{X(x)} = (A\ \cos ax + B\ sen\ ax)$

Existen un número infinito de esas soluciones, las etiquetamos con un subíndice

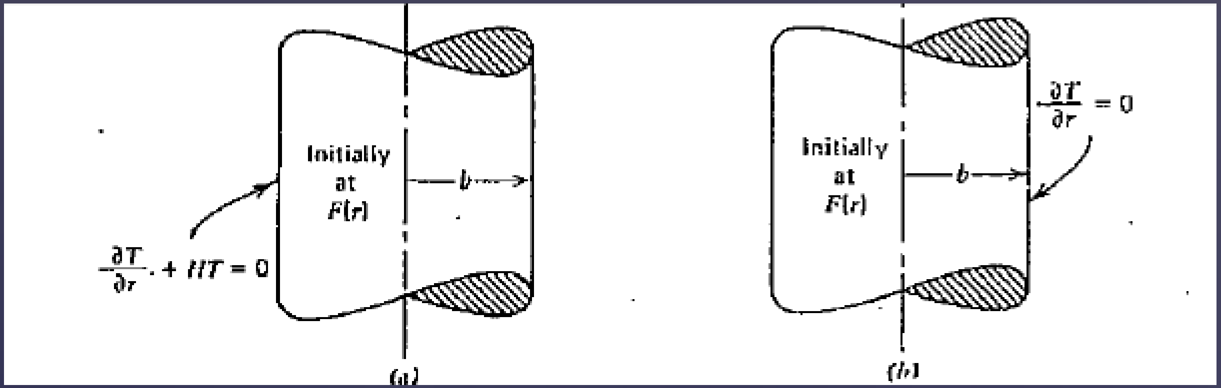
Las frecuencias $a_{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi x}{2H}$ Se calculan a partir de las condiciones de frontera.

Las frecuencias a_{2n+1}= Se calculan a partir de las condiciones de frontera.

Con lo que finalmente, la expresión explícita de la solución es una suma de esos productos

$$\mathrm{T(x,t)} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1} exp \frac{-1^2\pi^2\alpha t}{4H^2} sen \frac{1\pi x}{2H} + \frac{1}{3} exp \frac{-3^2\pi^2\alpha t}{4H^2} sen \frac{3\pi x}{2H} + \frac{1}{5} exp \frac{-5^2\pi^2\alpha t}{4H^2} sen \frac{5\pi x}{2H} + \cdots\right)$$

En esta clase. Cilindro conductor



Tomadas de M.N. OZICIK «Heat Transfer»

La frontera pierde calor por convección

La frontera se considera aislada.

«Misma» ecuación

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

pero en geometría cilíndrica.

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Separando las variables.

Al separar las variables, habrá 3 ecuaciones espaciales, una para cada coordenada.

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \eta^2 Z = 0$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \nu^2\Phi = 0$$

$$\frac{d^2R_\nu}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_\nu}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)R_\nu = 0$$

Y una para la coordenada temporal

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} + \alpha\lambda^2\Gamma(t) = 0$$

Su solución es $\Gamma(t): e^{-\alpha\lambda^2 t}$

Ecuación de Bessel.

$$\frac{d^2 R_\nu}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_\nu}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)R_\nu = 0$$

hay que resolver es:

Esta ecuación se conoce como la ecuación de Bessel

Tiene una singularidad en el origen.

También tiene un número infinito de soluciones etiquetado con un subíndice

$$y(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Para resolverla se propone una solución de la forma:

Determinación de γ y a_k

Encontrar la solución es entonces determinar

ν y a_k

Para determinar ν se usa la ecuación indicial:

$$\nu^2 - p^2 = 0$$

Determinación de a_k

Para determinar los coeficientes a_k, se sustituye la serie dentro de la ecuación y se obtiene:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0,$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2p+2)},$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)}$$

a_0 Debe ser una constante distinta de cero

Selección de a_0

Usualmente se selecciona

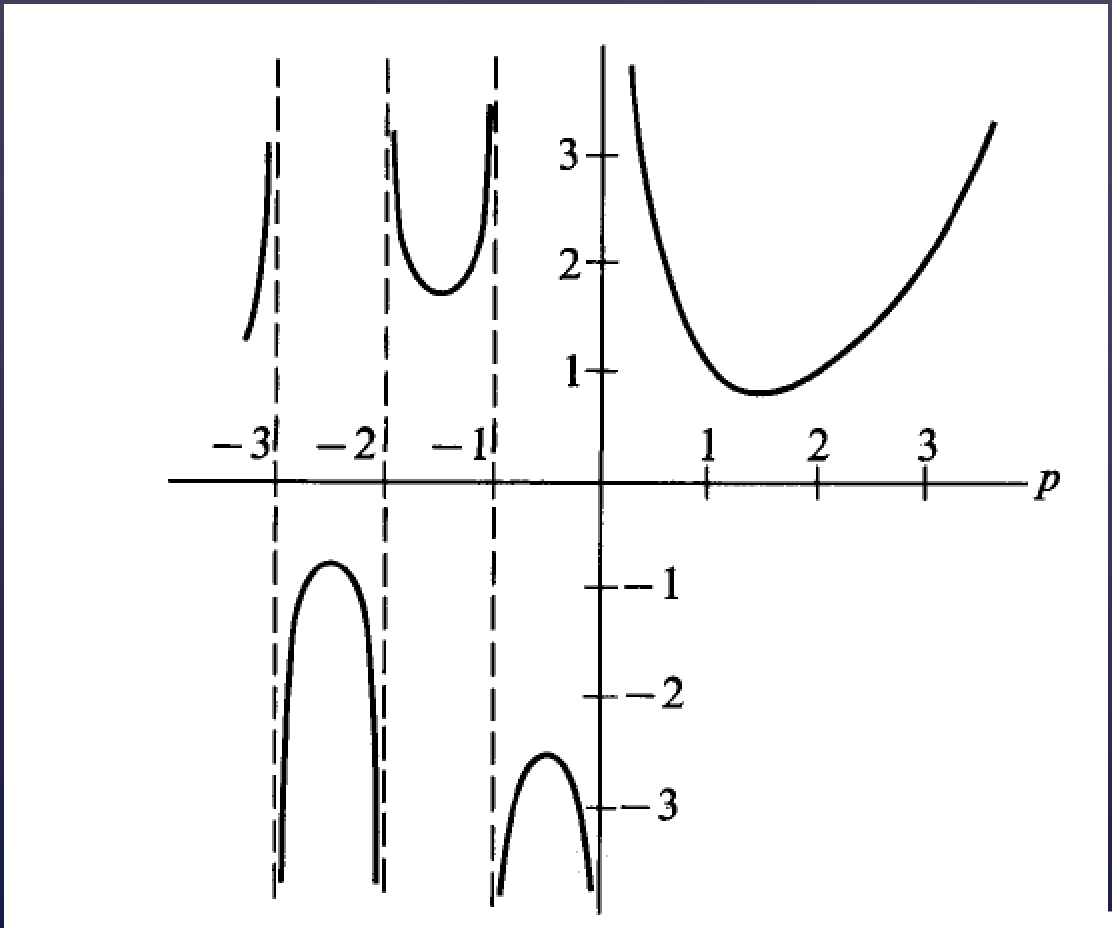
$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$

Donde

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1}\, dt, \quad p > 0.$$

Es la función

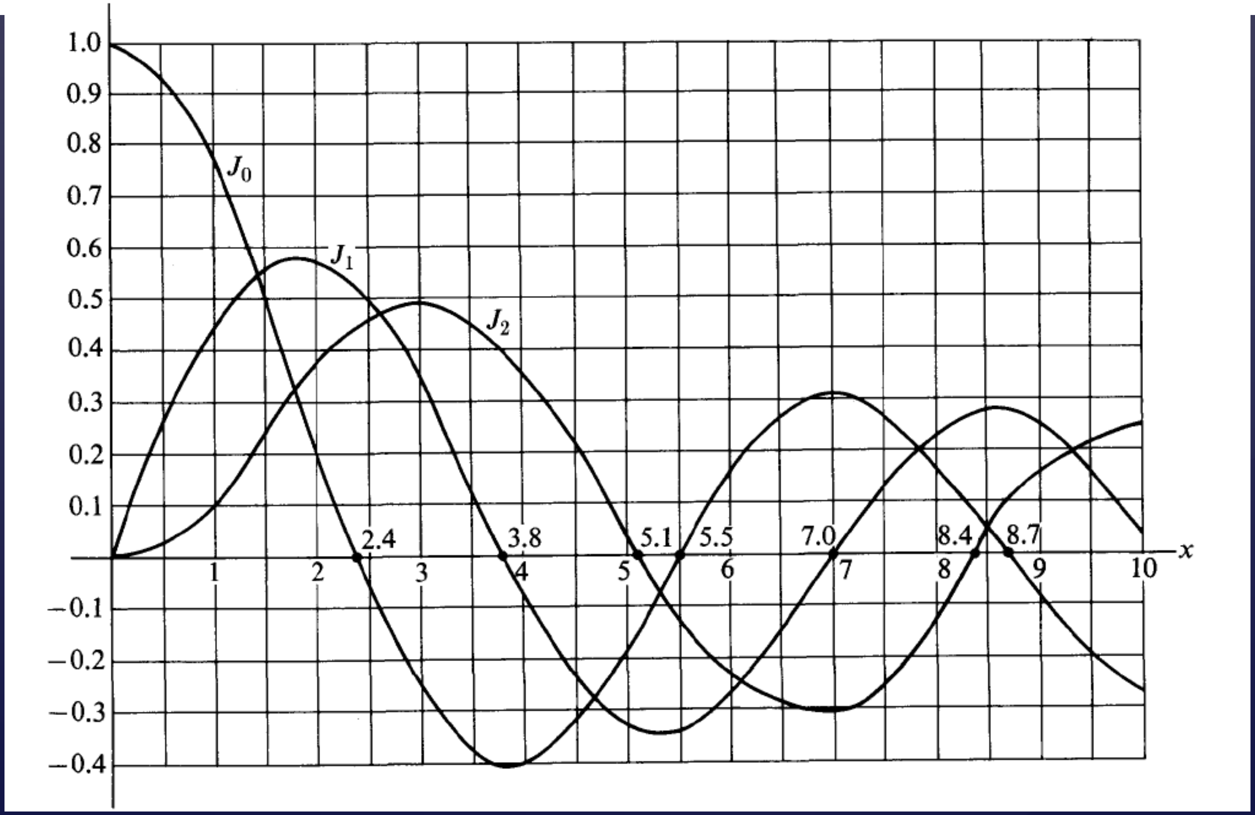
Paréntesis: Propiedades de la función



$$\Gamma(1) = 1,$$
$$\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p), \quad p > 0,$$

Función de Bessel de orden p de 1ª especie.

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}.$$



Casos particulares de P

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}.$$

ar, when $p = 0$, we have

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

generally, when p is a non-negative integer n,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel.

$$xJ_p' + pJ_p = xJ_{p-1},$$

$$xJ_p' - pJ_p = -xJ_{p+1},$$

Theorem 15–2. *The Bessel functions of the first kind satisfy the recurrence relations*

$$xJ_{p+1} - 2pJ_p + xJ_{p-1} = 0, \tag{15–53}$$

and

$$J_{p+1} + 2J_p' - J_{p-1} = 0. \tag{15–54}$$

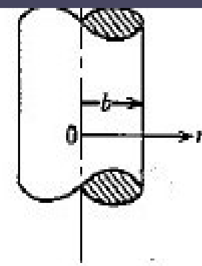
Construcción de la solución completa

$$T(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-\alpha \beta_m^2 t} R_0(\beta_m, r)$$

El valor de las C_m se determinará a partir de las condiciones de frontera.

Relación condiciones de frontera/ Soluciones.

$$\frac{d^2R_\nu}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_\nu}{dr}+\left(\beta^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)R_\nu=0 \quad \text{in} \quad 0\leq r<b$$



Subject to the Boundary Conditions Shown in the Table Below

No.	Boundary Condition at $r=b$	$R_\nu(\beta_m,r)$	$\frac{1}{N(\beta_m)}$	Eigenvalues β_m are the Positive Roots of
1	$\frac{dR_\nu}{dr}+HR_\nu=0$	$J_\nu(\beta_m r)$	$\frac{2}{J_\nu^2(\beta_m b)}\cdot\frac{\beta_m^2}{b^2(H^2+\beta_m^2)-\nu^2}$	$\beta_m J'_\nu(\beta_m b)+HJ_\nu(\beta_m b)=0$
2	$\frac{dR_\nu}{dr}=0$	$J_\nu(\beta_m r)^a$	$\frac{2}{J_\nu^2(\beta_m b)}\cdot\frac{\beta_m^2}{b^2\beta_m^2-\nu^2}{}^a$	$J'_\nu(\beta_m b)=0^a$
3	$R_\nu=0$	$J_\nu(\beta_m r)$	$\frac{2}{b^2J'^2_\nu(\beta_m b)}$	$J_\nu(\beta_m b)=0$

[a] For this particular case $\beta_0=0$ is also an eigenvalue with $\nu=0$; then the corresponding eigenfunction is $R_0=1$ and the norm $1/N(\beta_0)=2/b^2$.

Comentarios.

Las funciones de Bessel son como las funciones de Fourier (Sen_n t y Cos_n t) que permiten escribir una función solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales con condiciones a la frontera como suma de ellas. Aparecen en problemas de simetría cilíndrica.

Los números n (β_m) que los etiquetan se llaman eigenvalores.

Si la simetría es esférica aparecen otras funciones semejantes que se llaman armónicos esféricos.

Dos buenas referencias para ver los detalles de los cálculos son el Kreider y el Ozisik.

Ejemplo.

Un cilíndro sólido $0<r<b$ está inicialmente a una temperatura $F(r)$, para tiempos $t>0$ la susperficie disipa calor por convección al medio ambiente que se encuentra a una temperatura de $0\ ^{o}C$. Encontrar la distribución de temperatura $T(r,t)$ para $t>0$.

Solución

La solución temporal es:

$$\Gamma(t) = e^{-\alpha\beta_m^2 t}$$

La solución espacial son las funciones:

$R(\beta_m, r)$

Que pueden conocerse a partir de las condiciones de frontera y la tabla.

Boundary Condition at $r=b$	$R_\nu(\beta_m, r)$	$\frac{1}{N(\beta_m)}$	Eigenvalues β_m are the Positive Roots of
$\frac{dR_\nu}{dr} + HR_\nu = 0$	$J_\nu(\beta_m r)$	$\frac{2}{J_\nu^2(\beta_m b)} \cdot \frac{\beta_m^2}{b^2(H^2+\beta_m^2)-\nu^2}$	$\beta_m J'_\nu(\beta_m b) + HJ_\nu(\beta_m b) = 0$

Juntando las variables

La solución general es:

$$T(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-\alpha\beta_m^2 t} R_0(\beta_m, r)$$

Falta determinar los valores de las Cm, al hacerlo se obtiene:

$$T(r,t) = \frac{2HT_0}{b} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha\beta_m^2 t} \frac{J_0(\beta_m r)}{(\beta_m^2 + H^2) J_0(\beta_m b)}$$

Métodos de trabajar las soluciones.

Excel.

Simulador de Mathematica.

Gráficas

¿Qué se espera que el estudiante sea capaz de hacer?

Identificar el tipo de problema.

Fijar las condiciones a la frontera

Operar el excel, el simulador o identificar la gráfica pertinente

Programar soluciones nuevas en Excel y Mathematica.

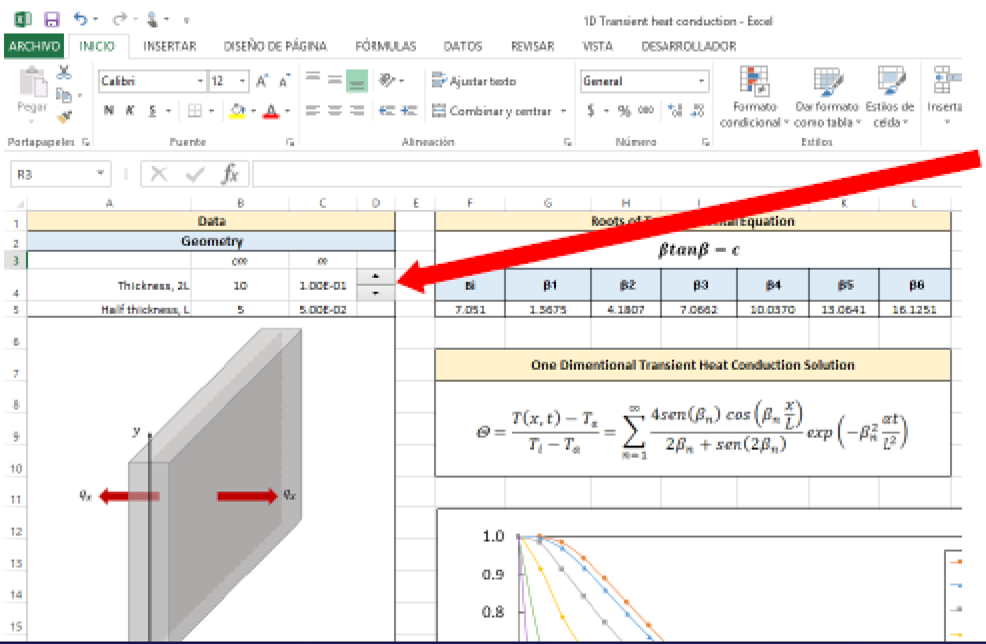
Hoja de cálculo.

Hola de Cálculo: Transferencia de calor en edo. no estacionario (medio finito)

Geometría: Pared plana infinitamente larga

M. en I. Roberto Cruces Reséndez

Dr. Bernardo Hernández Morales



En el cuadro **"Geometría"** se seleccionan las dimensiones de la placa (en este caso el espesor) con ayuda del controlador colocado a un costado. Es posible dar *click* en la celda y poner el valor requerido.

Data		
Dimentions		
	cm	m
Diameter, D	15	1.50E-01
Radius, R	7.5	7.50E-02
Initial Conditions		
	°C	K
Initial Temperature, T_i	500	773.15
Room Temperature, T_∞	50	323.15
Thermal Properties		
		$J s^{-1} m^{-1} °C^{-1}$
Thermal Conductivity, k		100.00
		$kg\ m^{-3}$
Density, ρ		1700.0
		$J\ kg^{-1}\ °C^{-1}$
Heat Capacity, Cp		900.0
		$J s^{-1} m^{-2} °C^{-1}$
Heat Transfer Coefficient, h		950
		$m^2 s^{-1}$
Thermal Diffusivity, α		6.54E-05
Biot Number, Bi		0.713

	r, m	r/R
1	1.88E-02	0.25
2	3.75E-02	0.50
3	5.63E-02	0.75
4	7.50E-02	1.00

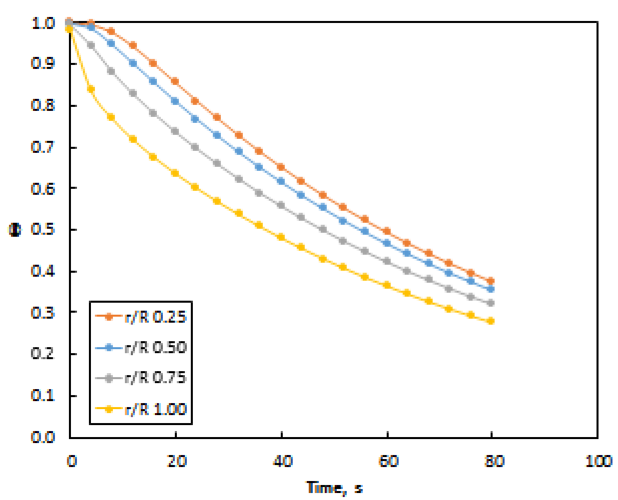
Roots of Transcendental Equation

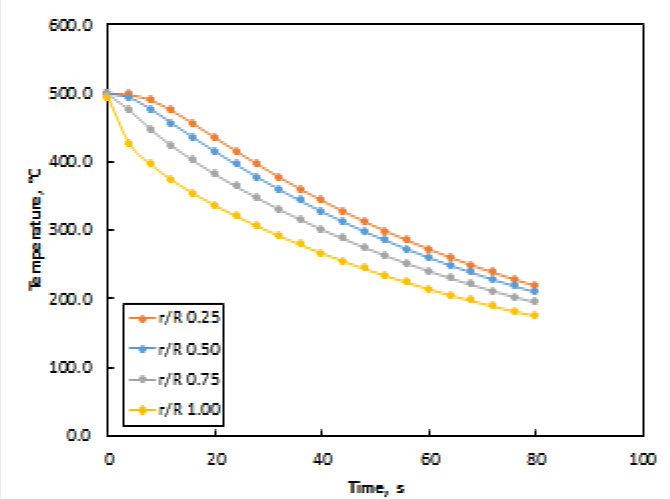
$$\beta J_1(\beta) - cJ_0(\beta) = 0$$

Bi	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
0.71	1.0919	4.0192	7.1256	10.2508	13.3832	16.5191

One Dimentional Transient Heat Conduction Solution

$$\Theta = \frac{T(r,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, J_1(\beta_n) J_0\left(\beta_n \frac{r}{R}\right)}{\beta_n J_0^2(\beta_n) + J_1^2(\beta_n)} exp\left(-\beta_n^2 \frac{\alpha t}{L^2}\right)$$





r/R	0.25															
t, [s]	Fo	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	Θ (r,t)	Θ (r,t)	Θ (r,t)	Θ (r,t)	Θ (r,t)	Θ (r,t)	T (r,t)	T (r,t)	T (r,t)
0.0	0.000	1.13382	-0.1718	0.03575	0.00475	-0.0144	0.01148	1.13	0.96	1.00	1.00	0.99	1.00	560.22	482.92	499.01
4.0	0.046	1.0727	-0.0811	0.00338	3.6E-05	-3E-06	3.6E-08	1.07	0.99	1.00	1.00	1.00	1.00	532.72	496.23	497.75
8.0	0.093	1.01488	-0.0383	0.00032	2.7E-07	-8E-10	1.1E-13	1.01	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	506.70	489.47	489.62
12.0	0.139	0.96017	-0.0181	3E-05	2.1E-09	-2E-13	3.4E-19	0.96	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	482.08	473.95	473.96
16.0	0.186	0.90841	-0.0085	2.8E-06	1.6E-11	-5E-17	1.1E-24	0.91	0.90	0.90	0.90	0.90	0.90	458.79	454.95	454.95
20.0	0.232	0.85944	-0.004	2.7E-07	1.2E-13	-1E-20	3.3E-30	0.86	0.86	0.86	0.86	0.86	0.86	436.75	434.94	434.94
24.0	0.279	0.81311	-0.0019	2.5E-08	8.9E-16	-3E-24	1E-35	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	415.90	415.05	415.05
28.0	0.325	0.76928	-0.0009	2.4E-09	6.8E-18	-7E-28	3.2E-41	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	0.77	396.18	395.77	395.77
32.0	0.372	0.72781	-0.0004	2.3E-10	5.1E-20	-2E-31	9.9E-47	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	377.52	377.33	377.33
36.0	0.418	0.68858	-0.0002	2.1E-11	3.9E-22	-4E-35	3.1E-52	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	0.69	359.86	359.77	359.77
40.0	0.465	0.65146	-9E-05	2E-12	2.9E-24	-1E-38	9.5E-58	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	343.16	343.12	343.12
44.0	0.511	0.61634	-4E-05	1.9E-13	2.2E-26	-2E-42	3E-63	0.62	0.62	0.62	0.62	0.62	0.62	327.35	327.33	327.33
48.0	0.558	0.58312	-2E-05	1.8E-14	1.7E-28	-6E-46	9.2E-69	0.58	0.58	0.58	0.58	0.58	0.58	312.40	312.39	312.39

Roots Transc. Eqs | Plate | Cylinder | Sphere

Listo

Gráfica para el perfil radial de temperatura en un cilindro infinito.

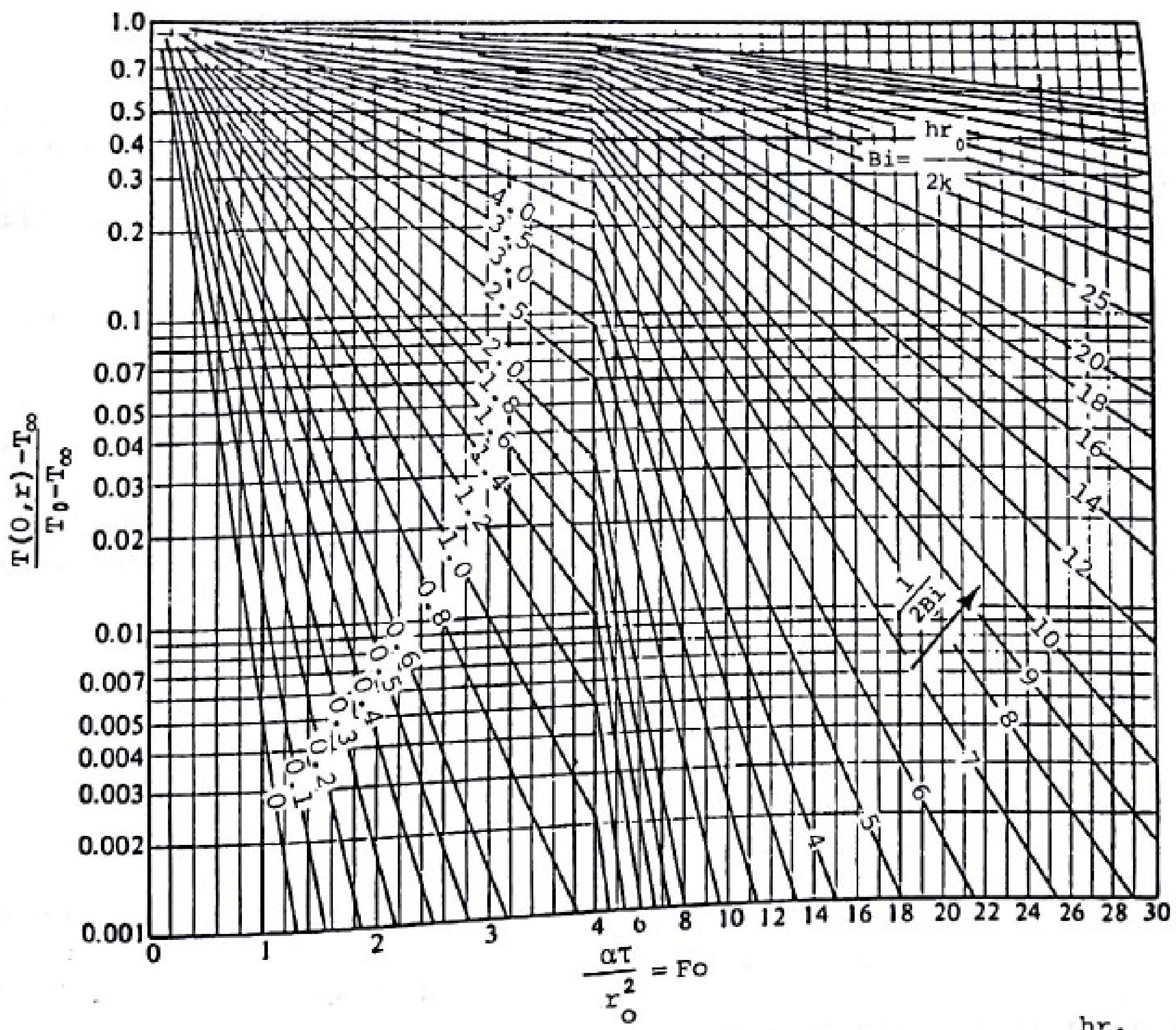


Fig. 2. AXIS TEMPERATURE FOR A LONG CYLINDER OF RADIUS, r_0, $Bi = \frac{hr_0}{2k}$

Cuestionario

1. En que son iguales y en que se diferencian las ecuaciones de difusión para una placa de espesor 2H y un cilindro de radio r

2. Cómo se escribe el gradiente en coordenadas clíndricas.

3. Cómo se escribe el gradiente en coordenadas esféricas.

4. ¿Qué forma toma la ecuación de difusión para un cilindro infinito si la temperatura no varía con el ángulo?

Cuestionario.

5. ¿Cómo se escriben las condiciones a la frontera, de los tres casos vistos en clase para el cilindro conductor y qué significan?

6. ¿Para qué son útiles las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel?

7. ¿Qué es un eigenvalor y para qué sirve?

8. ¿Qué métodos tienes a tu disposición para resolver problemas de transferencia de energía en estado no estacionario en coordenadas cilíndricas?