Estado No Estacionario

(Con gradientes)

Objetivos.

- Conocer la ecuación que controla el fenómeno de transferencia de energía en estado no estacionario.
- Entender el rol de las condiciones de frontera al especificar el problema.
- Traducir las condiciones físicas de un problema al lenguaje matemático.
- Conocer diferentes métodos analíticos y computacionales para la solución de la ecuación de calor.
- Resolver problemas de conducción de calor en estado no estacionario en geometría cartesiana.

La Ecuación

La ecuación de difusión describe la conducción de calor en estado no estacionario, cuando no hay fuentes internas de generación de calor.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$

Donde α, la difusividad térmica, es el cociente $k/\rho C_p$

Las condiciones a la frontera

- Esta ecuación representa una gran familia de fenómenos

- Para aplicarla a la solución de un caso particular es necesario fijar la

  - Geometría (Rectangular, cilíndrica…)
  - Las condiciones iniciales y de frontera que lo describen.

Aproximaciones y adimensionalización.

En una dimensión.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

De manera adimensional

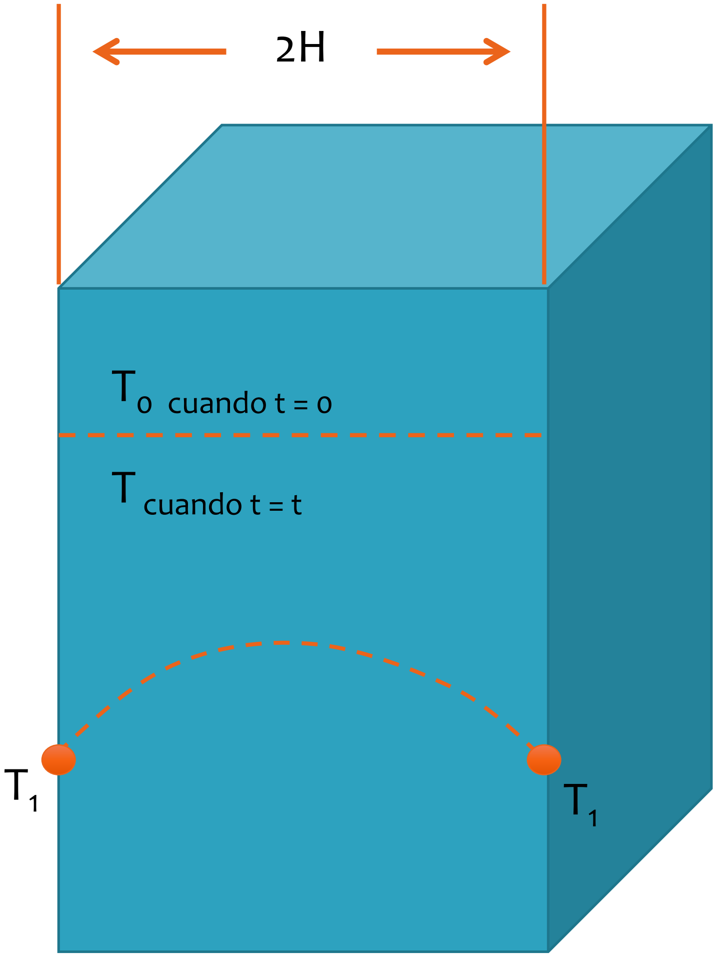
$$\boldsymbol{Y} = \frac{\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{t}} = \propto \frac{\partial^2 \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{x}^2}$$

Métodos de resolución. Ventajas y desventajas.

- Analítico : Separación de variables
  - «A pie». Unas pocas geometrías simples.
  - Analítico computacional. Mathematica, Maple
- Numérico: Diferencias finitas y elemento finito.
  - Programándolo. Fortran, C, etc.
  - Programas comerciales: Fluent, Abaqus y otros programas comerciales y de acceso abierto.
- Tablas y gráficas.
  - De libros como Geankoplis.
  - Excel…

Ejemplo de solución analítica. Placa de espesor 2H



$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$\alpha = k/\rho C_p$

Condición Inicial

T = T_0 en t = o y x = x

Condiciones a la frontera.

T = T1 en t = t y x = 0

Condiciones a la frontera.

T = T1 en t = t y x = 2H

Separación de variables

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

$$\frac{X''}{X} = a^2 \frac{T'}{T}$$

$$X'' - \lambda X = 0,$$

$$T' - \frac{\lambda}{a^2} T = 0,$$

La solución es:

$$Y = e^{-a^2 \alpha t}(A \cos ax + B \operatorname{sen} ax)$$

Las condiciones iniciales aplican a la ecuación de la parte temporal

Las condiciones a la frontera aplican a la parte espacial

Cuando se adimensionalizan las variables, las condiciones iniciales y a la frontera, se ajustann

Usando las condiciones a la frontera.

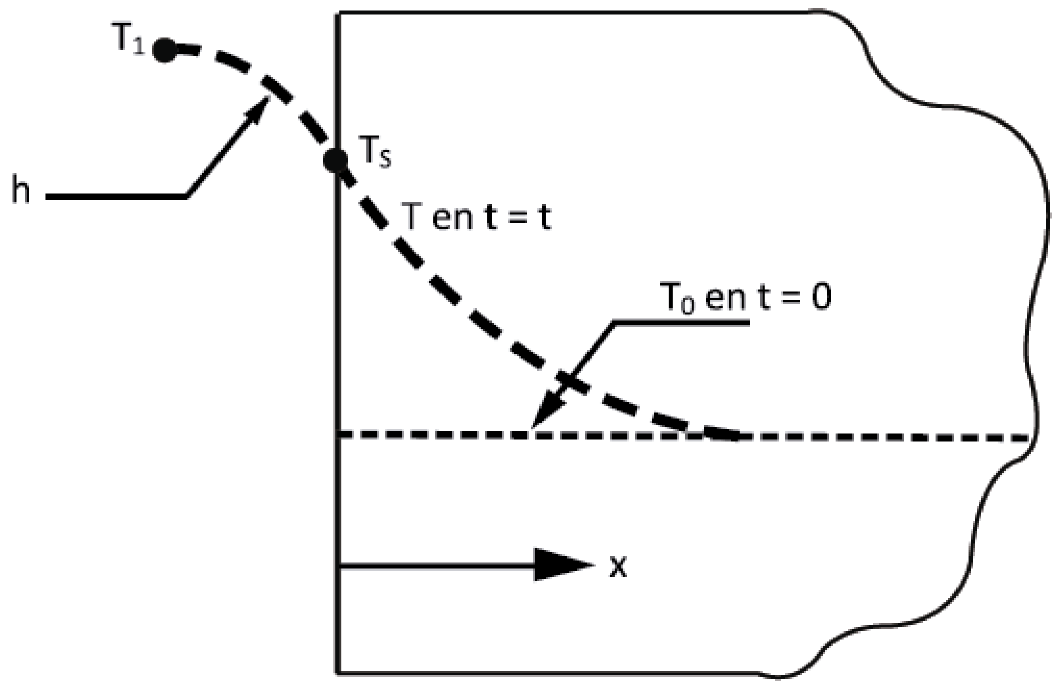
$A_{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi x}{2H}$

$B_{2n+1} = 0$

$$\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} =$$

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1} exp \frac{-1^2\pi^2\alpha t}{4H^2} sen \frac{1\pi x}{2H} + \frac{1}{3} exp \frac{-3^2\pi^2\alpha t}{4H^2} sen \frac{3\pi x}{2H} + \frac{1}{5} exp \frac{-5^2\pi^2\alpha t}{4H^2} sen \frac{5\pi x}{2H} + \cdots\right)$$

Otro ejemplo: Sólido semi-infinito



La ecuación es la misma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pero diferentes condiciones iniciales:

$T = T_0$ en t=0

y de frontera:

T_x (0,t) = -h T(0, t)
con h =Cte.

Las ecuaciones son las mismas:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

$$\frac{X''}{X} = a^2 \frac{T'}{T}$$

$$X'' - \lambda X = 0,$$
$$T' - \frac{\lambda}{a^2} T = 0,$$

Pero no las condiciones a la frontera.

Pero no las condiciones a la frontera.

	T=0	Xizq	Xder
2H	T_0	T_1	T_1
Placa semiinfinita	T_0	$h(T_1\text{-}T_s)$	

Nótese que aunque la ecuación que describe el problema es la misma, los dos os representan situaciones físicas diferentes.

Por ejemplo, en el caso de la placa semiinfinita hay transferencia de calor, lo que no ocurre en la de espesor 2H

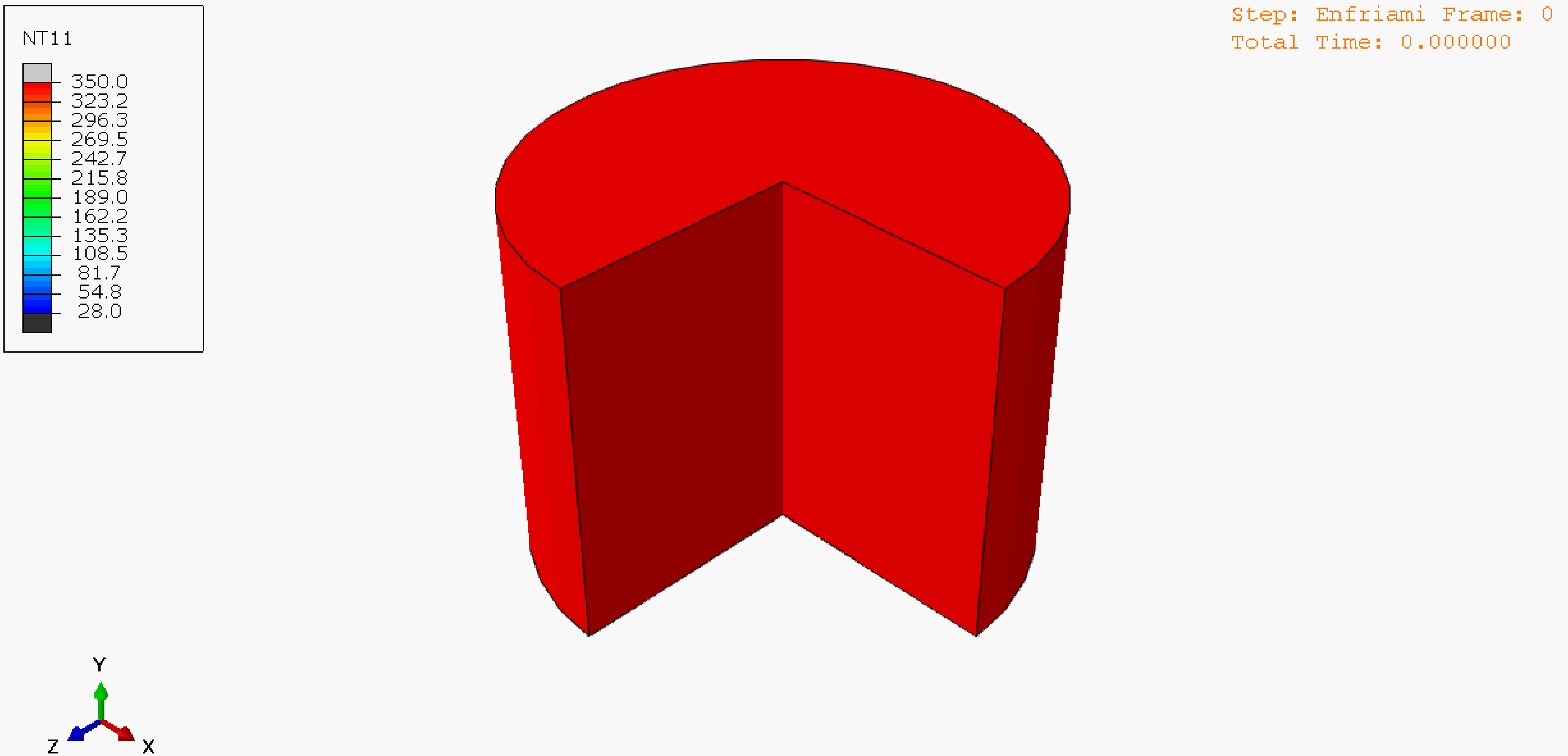
Solución analítica

$$\frac{T \quad - T_0}{T_1 - T_0} = 1 - Y = erfc\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$-exp\left[\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right)\right]erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h}{k}\sqrt{\alpha t}\right)$$

Una buena referencia para los aspectos teóricos de la solución analítica de la ecuación de calor es el libro de Kreider «Introducción al análisis lineal»

Numérico. Abaqus



Conducción de calor en una placa bidimensional

Considere la ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Con las siguientes condiciones de frontera e iniciales

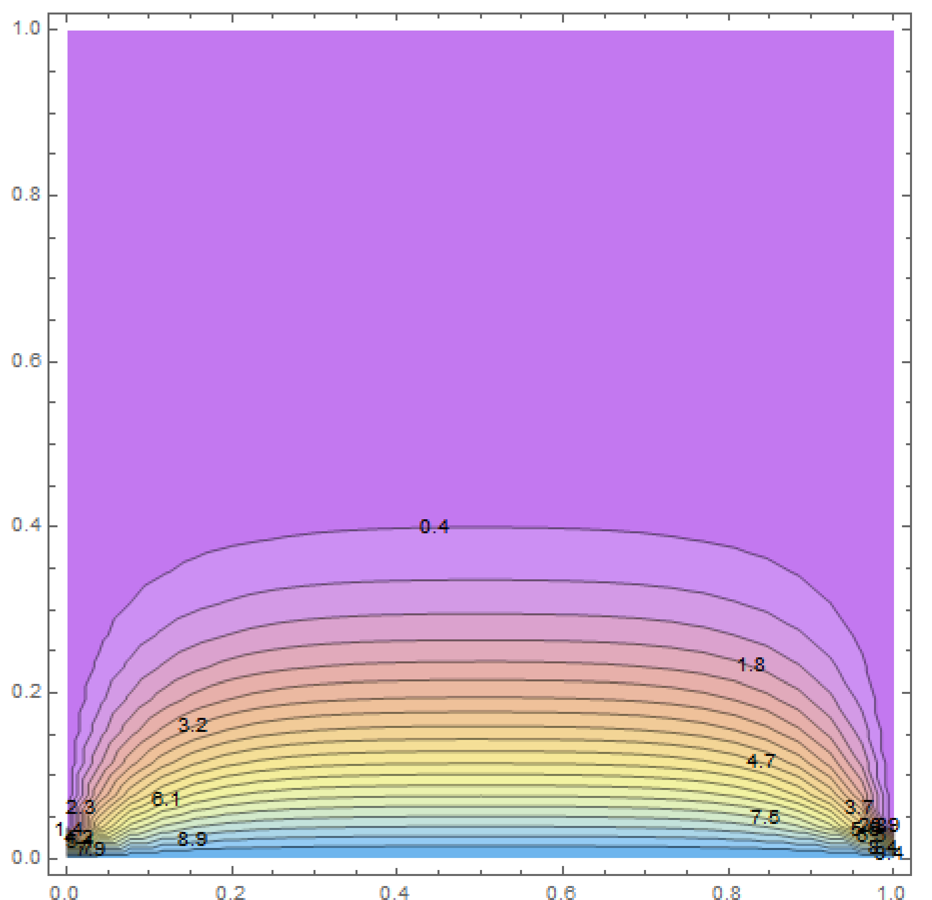
$T(0, y, t) = 0,$

$T(1, y, t) = 0,$

$T(x, 1, t) = 0,$

$T(x, 0, t) = 10,$

$T(x, y, 0) = 0,$



Housam Binous. "Solution of the 2D Heat Equation Using the Method of Lines" http://demonstrations.wolfram.com/SolutionOfThe2DHeatEquationUsingTheMethodOfLines/ Wolfram Demonstrations Project Published: March 27, 2012

Solución. Método Analítico computacional Mathematica.

Ejemplo:

Otros ejemplos en: Wolfram demonstrations

Mixed Boundary-Value Problem for the One-Dimensional Heat Equation

Fourier sine coefficients of initial temperature

b_1 1.

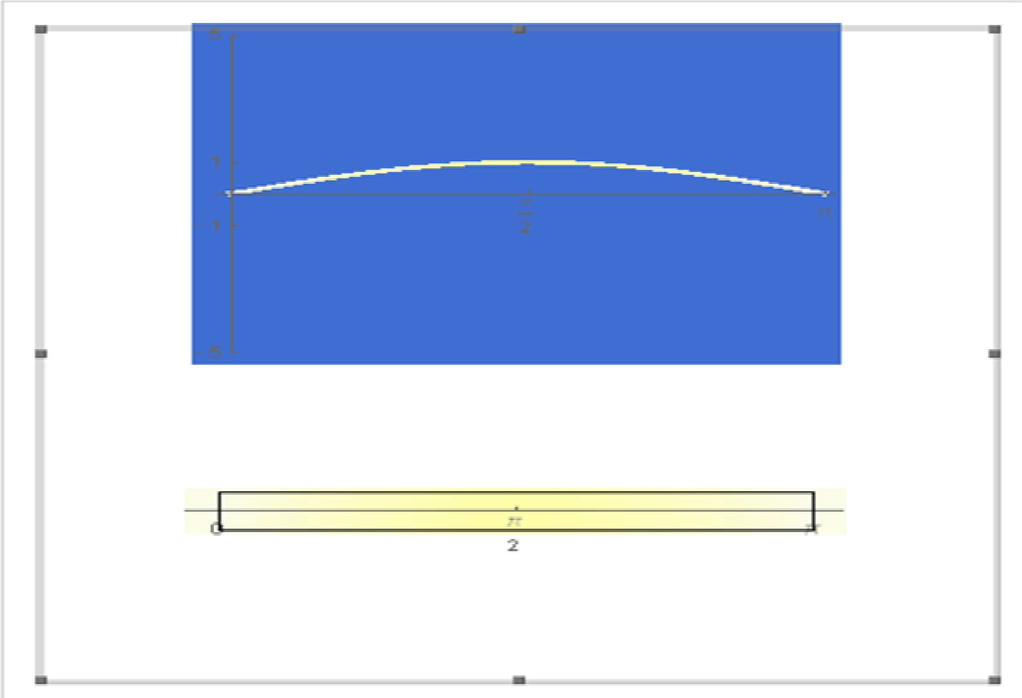
b_2 0.

b_3 0.

b_4 0.

b_5 0.

time 0



This Demonstration determines solutions to the mixed boundary-value problem for the one-dimensional heat equation. This pertains to the conduction of heat in a bar in which the ends are kept at fixed temperatures (0° in this case), with a specified initial temperature distribution, $u_0(x)$.

Contributed by: Santiago Marín Malavé

Ejemplo. Temperatura del suelo

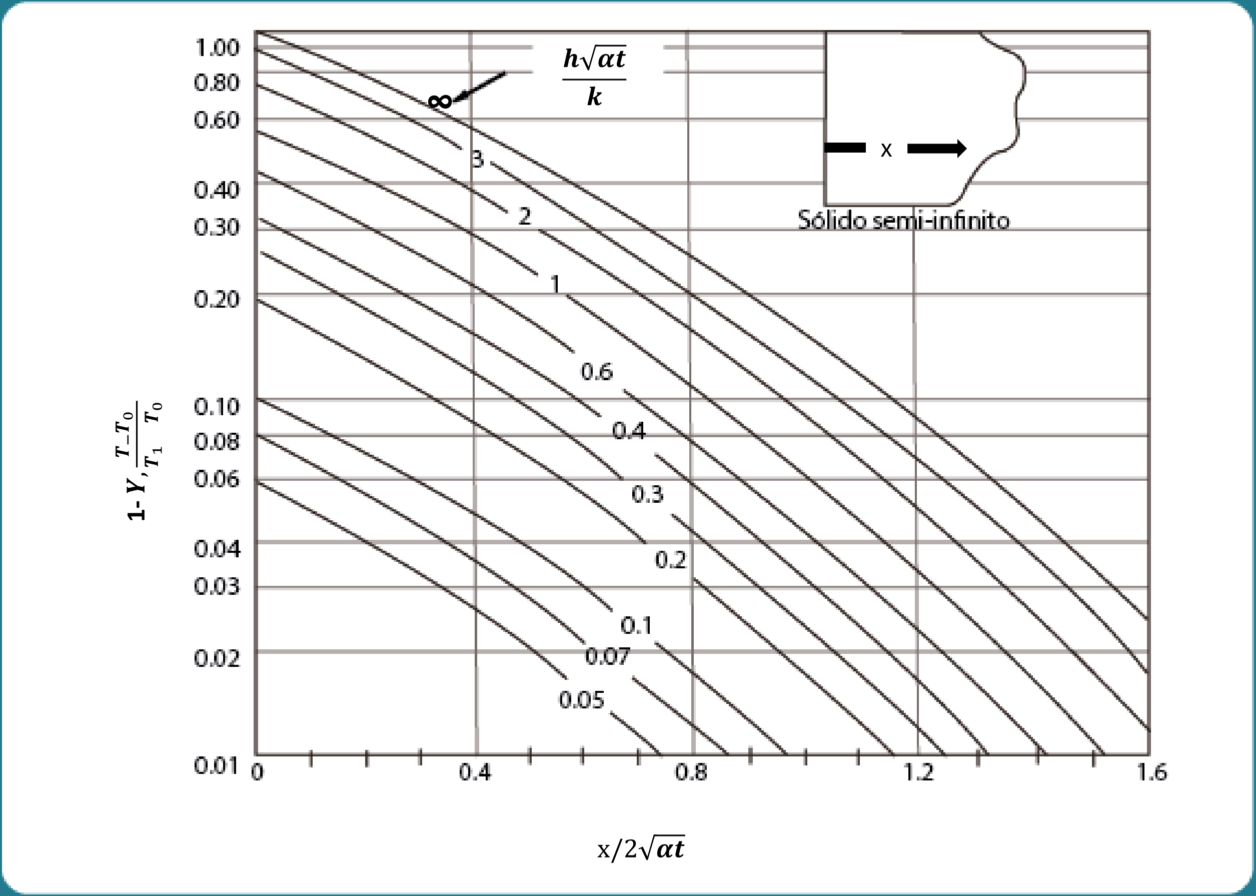
Durante cierto día de otoño, la temperatura del suelo tiene un valor constante de 15.6 ^oC (6.0 ^oF) hasta una profundidad de varios metros. Una onda fría reduce repentinamente la temperatura del aire de 15.6 hasta unos -17.8 ^oC (0 ^oF)). El coeficiente convectivo por encima del suelo es ll .36 W/m^2 ^oK. Las propiedades del suelo son: $\alpha = 4.65 \times 10^{-7}$ m^2/s y k= 0.865 W/m ^oC K . Desprecie los efectos del calor latente para encontrar:

a) ¿Cuál será la temperatura de la superficie después de 5 h?

b) ¿Hasta qué profundidad del suelo penetrara la temperatura de congelación de 0 ^oC en 5 h?

El Método de las Gráficas.

Viajando al pasado, el problema se puede resolver usando tablas.



Hay tablas para diferentes geometrías.

Los valores a la frontera e iniciales se reflejan en las distintas curvas.

Solución

Para usar la tabla es necesario calcular los parámetros

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}$$

Para la pregunta del a) x=0 y por lo tanto también $\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{11.36\sqrt{(4.65x\ 10^{-7})(5\ x\ 3600)}}{0.865} = \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{2\sqrt{0.018(5)}}{0.5} = 1.2$$

Con lo que podemos ir a buscar en la tabla, el valor correspondiente de la temperatura adimensional y despejando: *T= 267.76 K o -5.44*

Para el inciso b), T= 273.2 K o 0 °C, y se desconoce la **distancia** x. Sustituyendo los valores conocidos,

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{273.2 - 288.8}{255.4 - 288.8} = 0.467$$

Para $(T - T_0)/(T_1 \quad T_0)$= 0.467 y $h\sqrt{\alpha t}/k = 1.2$, se lee en la figura 5.3-3 un valor de 0.16 para x/2 $\sqrt{\alpha t}$. Por consiguiente,

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{x}{2\sqrt{\left(4.65 \times 10^{-7}\right)(5 \times 3600)}} = 0.16 \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{x}{2\sqrt{0.018(5)}} = 0.16$$

Despejando x, esto es, la distancia de penetración de la temperatura de congelación en 5 h,

$$x = 0.0293 \text{ m } (0.096 \text{ pie})$$

El mismo tipo de problema puede resolverse para el aumento de temeperatura en un día de verano.

Hay muchos otros casos, que pueden resolverse con la misma ecuación.

- Para otras geometrías:
  - Pared vertical
  - Cilindro
  - Esfera

- Y otras condiciones a la frontera

Continuara…

Cuestionario

- ¿Por qué pueden resolverse diferentes problemas usando la misma ecuación diferencial?
- Enumera los diferentes métodos que existen para resolver la ecuación de difusión.
- ¿En qué consiste el método de separación de variables?
- ¿Qué métodos numéricos se emplean para resolver numéricamente la ecuación de transferencia de calor en estado no estacionario?
- ¿Qué programas de cómputo pueden usarse para resolver numéricamente la ecuación de transferencia de calor en estado no estacionario?
- ¿Qué ventajas y desventajas tiene el método de resolver la ecuación de transferencia de calor en estado no estacionario, usando gráficas?