Estado no Estacionario

Menú

oblema
ojetivos
uaciones de balance para un fluido en
ovimiento
foques Euleriano y Lagrangiano
oncepto de campo y derivada material (t
uación de difusión
onductividad infinita
emplo

Problema

Cómo se obtiene el perfil de temperatura
uando hay dependencia del tiempo?

Objetivos

1. Comprender la diferencia entre el enfoque Euleriano y Lagrangiano en la descripción del movimiento de un fluido.
2. Entender la ecuación de balance de energía en estado no estacionario, como una generalización a un medio continuo de la 1ª ley de la termodinámica.
3. Conocer la ecuación que controla la evolución temporal de los perfiles de temperatura en el caso de transferencia de calor en estado no estacionario (ecuación de difusión) como un caso límite de la ecuación general de balance de energía.
4. Conocer el criterio para determinar en qué casos se puede considerar una transferencia de calor

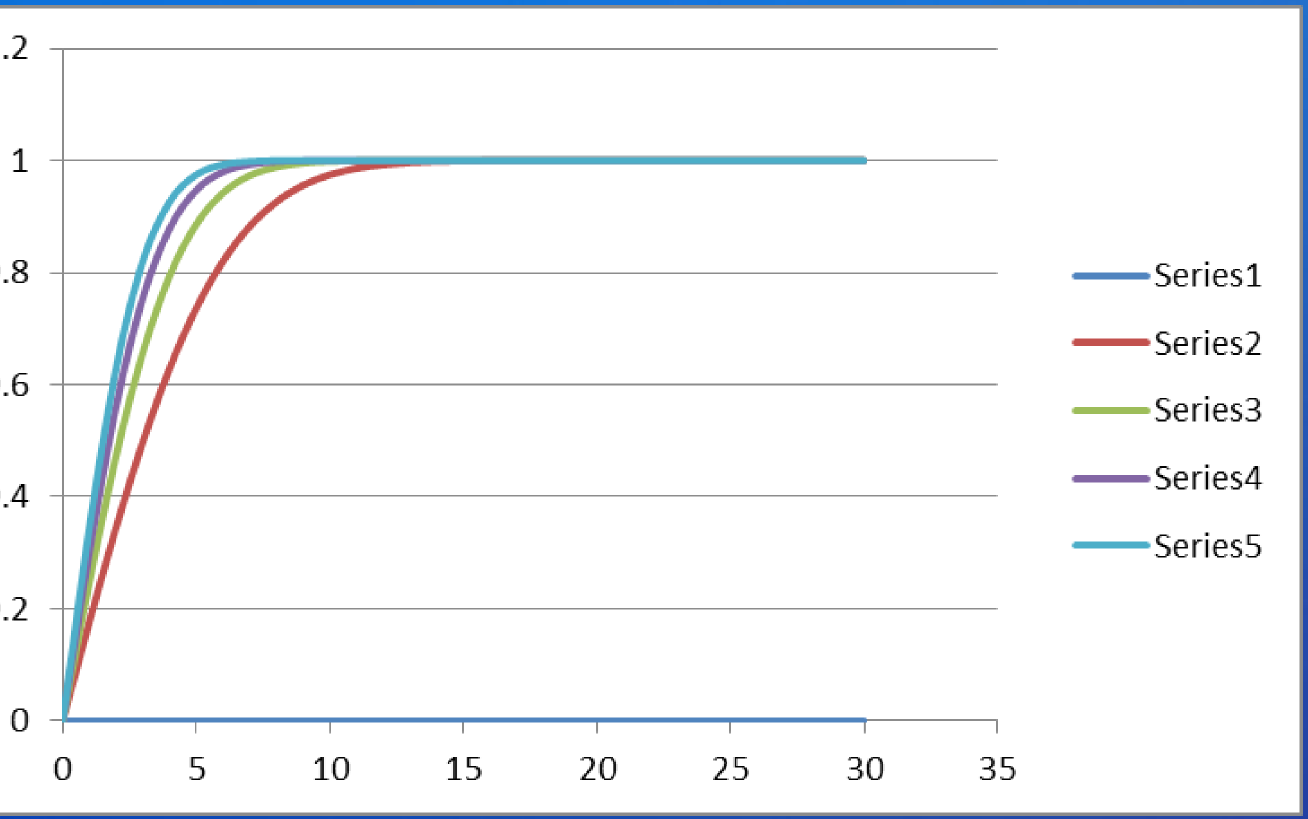
Perfiles de temperatura

ta esta parte del curso, los que hemos v
varían con el tiempo.

se consigue gracias a que se proporcion
rgía al sistema (calefactor, por ejemplo)

“natural” sería que los perfiles cambiara
n el tiempo.

lución temporal del perfil de temperatur



terminación del perfil de temperaturas.

T (X,t) puede obtenerse experimentalmente
ando T no depende del tiempo, podemos conocer a través de una ecuac

xiste una ecuación para conocer T ando depende del tiempo?

respuesta corta es sÍ:
e llama la ecuación de difusión.

Ecuaciones de balance para un fluido en movimiento

La ecuación de difusión

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

es un caso particular de la ecuación de balance de energía.

Otras ecuaciones de balance

xisten otras ecuaciones de balance:

e cantidad de Movimiento (Navier Stokes

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla P - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$$

De masa (Continuidad)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

cuaciones de continuidad y movimiento

Las tres ecuaciones, son el resultado de balances como los que hemos hecho para la energía, en el caso Estacionario

resentan la generalización, al caso un medio continuo de las ecuaciones de nsevación de masa, energía y momento.

a comparativa partícula vs Medio continuo

Física de la partícula	**Medio Continuo**
Conservación de la masa	Ec. de continuidad
Conservación de la energía	Ec. De difusión
Conservación del momento	Ec. De Navier-Stokes

Euler vs Lagrange.

Lagrange “persigue” a las partículas
(marcaje hombre a hombre)

Euler se fija en una región del espacio.
(marcaje por zona)

Un poquito de matemáticas:

La regla de la cadena

$$\frac{\partial c}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial c}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial c}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

La Derivada material (Total)

U(X, Y, Z, t) ; X(t), y(t), Z(t)

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + v_x\frac{\partial U}{\partial x} + v_y\frac{\partial U}{\partial y} + v_z\frac{\partial U}{\partial z}$$

Balance de energía

$$\begin{Bmatrix}\text{Velocidad de}\\ \text{acumulación de}\\ \text{energía cinética e}\\ \text{interna}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{Velocidad de}\\ \text{entrada de energía}\\ \text{cinética e interna}\\ \text{por convección}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{Velocidad de salida de}\\ \text{energía cinética e}\\ \text{interna por convección}\end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{Bmatrix}\text{Velocidad neta de}\\ \text{adición de calor}\\ \text{por conducción}\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\text{Velocidad neta de}\\ \text{trabajo comunicado}\\ \text{por el sistema a los}\\ \text{alrededores}\end{Bmatrix}$$

Matemáticamente

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\hat{U}+\frac{1}{2}v^2\right)=$$

Velocidad de ganancia de energía por unidad de volumen

$$-(\nabla\cdot\rho v\left(\hat{U}+\frac{1}{2}v^2\right))$$

Velocidad de entrada de energía por unidad de volumen debido a la convección

$$-(v\cdot q)$$

Velocidad de entrada de energía por unidad de volumen debido a la conducción

$$+\rho(v\cdot g)$$

Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas de gravitación

$$-(\nabla\cdot pv)$$

Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas de presión.

$$-(\nabla\cdot[\tau\cdot V])$$

Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas viscosas

Ecuación de balance.

Velocidad de acumulación de energía cinética e interna

Velocidad neta de adición de calor por conducción

Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas de presión

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\hat{U}+\frac{1}{2}v^2\right)=-\left(\nabla\cdot\rho v\left(\hat{U}+\frac{1}{2}v^2\right)\right)-(v\cdot q)+\rho(v\cdot g)-(\nabla\cdot pv)-(\nabla\cdot[\tau\cdot V])$$

Velocidad de entrada de energía cinética e interna por convección

Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas de gravitación

Velocidad de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las fuerzas viscosas

Para usar la ecuación en casos particulares

necesario además una ecuación de esta
ejemplo: PV = nRT

elaciones termodinámicas entre dq,
y C_p o C_v Û (V,T)

$$d\hat{U} = \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}}\right)_T d\hat{V} + \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}}\right)_{\hat{v}} dT = \left[-p + T\left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial T}\right)_{\hat{v}}\right] d\hat{V} + C_v d\mathrm{T}$$

Casos particulares

$$\rho C_v \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho (\nabla \cdot v) + \mu\varphi_v$$

$$\varphi_v = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$+ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2$$

$$- \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2$$

Ecuación de difusión

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Conductividad infinita (Gradiente cero).

$$hA(T_\infty - T)dt = c_p \rho V dT$$

Integrando

$$\int_{T=T_0}^{T=T} \frac{dT}{T_\infty - T} = \frac{hA}{c_p \rho V} \int_{t=0}^{t=t} dt$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-(hA/c_p \rho V)t}$$

Número de Biot

$$N_{Bi} = \frac{hx_1}{k} < 0.1$$

Velocidad de enfriamiento

$$\frac{dT}{dt} = -(T_0 - T_\infty)(h\,A/c_p\,\rho V)e^{-(hA/c_p\rho V)t}$$

Ejemplo

esfera de acero de radio 1 pulgada con temperatura inicial de 800
erge en un medio a 250 ^oF.
2.0 Btu/hr. Ft ^{2} ^oF.
es la temperatura de la esfera después de 1 hora?

Ejemplo

$$x_1 = \frac{V}{A} = \frac{r}{3} = \frac{\frac{1}{12}}{3} = \frac{1}{36} pie$$

$$= \frac{2.54}{100 \times 3} = 8.47 \ \times 10^{-3} m$$

$$N_{Bi} = \frac{hx_1}{k} = \frac{2\frac{1}{36}}{25} = 0.00222$$

$$N_{Bi} = \frac{(11.36)(8.47 \times 10^{-3})}{43.3} = \ 0.00222$$

$$\frac{hA}{c_p \rho V} = \frac{2}{\left(0.11)(490)(\frac{1}{36}\right)} = 1.335\ hr^{-1}$$

$$\frac{hA}{c_p \rho V} = \frac{11.36}{\left(0.4606 \times 1000)(7849)(8.47 \times 10^{-3}\right.} = 3.71 \times 10^{-4} s^{-1} (1.335 hr^{-1})$$

Finalmente

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T - 250°\text{F}}{800 - 250} = e^{-(hA/c_p\rho V)t} = e^{-(1.335)(1.0)}$$

$$T = 395°\text{F}$$

$$\frac{T - 394.3K}{699.9 - 394.3} = e^{-(3.71\times10^{-4})(3600)}$$

$$T = 474.9\ K$$

Cuestionario (1/3)

Analiza la gráfica de la diapositiva “Evolución temporal del perfil de temperaturas” y describe, qué variable se encuentra en el eje x, cuál en el eje y, qué representa cada uno de los colores

¿Cómo puede conocerse la evolución temporal del perfil de temperaturas?

¿Cuáles son las tres ecuaciones de balance que generalizan, al caso del medio continuo, las leyes de conservación de masa, energía y cantidad de movimiento?

Cuestionario (2/3)

¿Cuáles de esos términos permanecen en la ecuación de difusión?

¿Cuál es la diferencia entre el enfoque Lagrangiano y el Euleriano en el estudio del movimiento de un fluido?

¿En matemáticas, a qué se le llama un campo?

¿Por qué es necesario usar la regla de la cadena en la escritura de las ecuaciones de balance, cuando hay un fluido en movimiento?

Cuestionario (3/3)

¿Cómo se escribe el balance de energía en el caso de conductividades infinitas o gradiente cero?

¿Qué criterio se usa para saber si la aproximación de gradiente cero, es pertinente?

En el caso de gradiente cero, ¿existe un perfil de velocidades?

¿Qué compara el número de Biot?