Balance de energía cuando existen fuentes de calor.

Menú

- Planteamiento del problema.
- Objetivos.
- Balance de energía con fuentes de calor
- Ejemplos
  - Efecto Joule
  - Viscocidad
  - Reacción química
  - Reacción nuclear
- Cuestionario

Planteamiento del problema.

- ¿Cómo se escribe la ecuación de transporte de energía, cuando existen fuentes internas de generación de calor?

Objetivos.

- Conocer que tipo de situaciones corresponden a generación interna de calor
- Conocer la ecuación de transporte de energía, cuando existen fuentes internas de generación de calor
- Plantear problemas de conducción de calor cuando existen fuentes al interior del material.
- Resolver problemas de conducción de calor en estado estacionario cuando existen fuentes internas.

Ejemplos de situaciones que corresponden a generación interna de calor

- Efecto Joule
- Viscosidad
- Reacción química
- Reacción nuclear

Pasos para conocer el perfil de temperatura y el flujo de calor existan o no fuentes de calor al interior del material.

- Balance.
- Ecuación diferencial para q + CI
- Integración para q
- Ecuación de Fourier
- Integración para T
- Perfil de temperaturas
- Cálculo del flujo de calor en la superficie

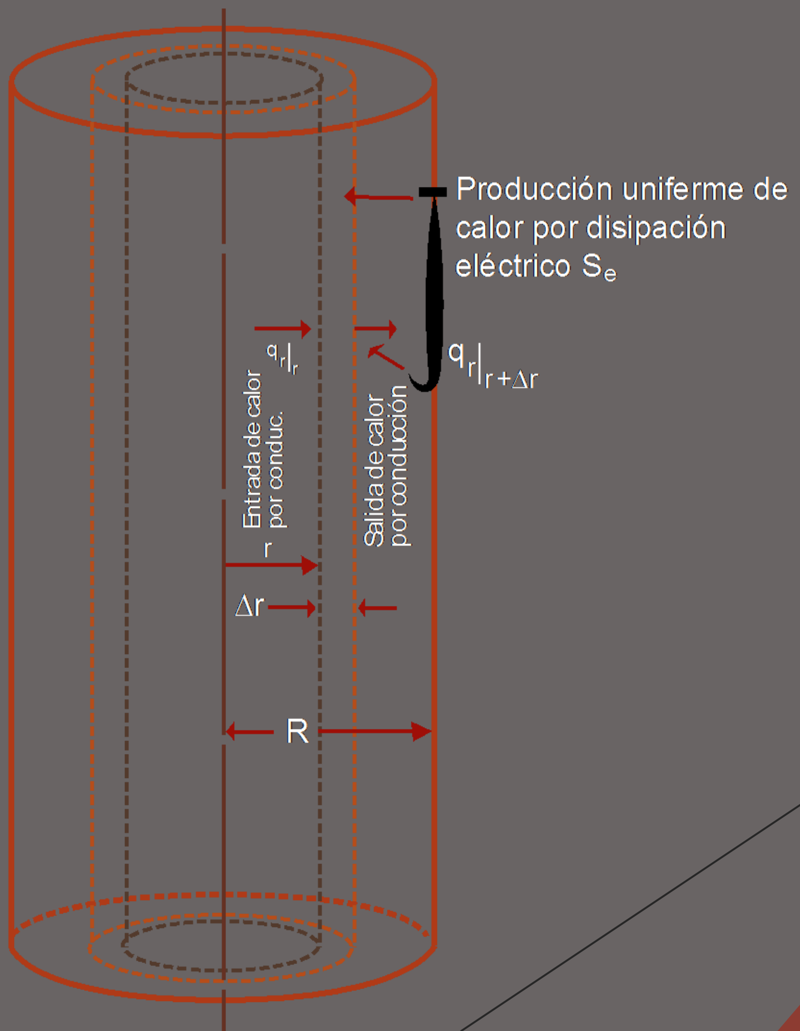
Balance sin fuentes de calor

$$\left\{\begin{matrix} velocidad\ de \\ entrada\ de \\ energía\ calorífica \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} velocidad\ de \\ salida\ de \\ energía\ calorífica \end{matrix}\right\} = 0$$

Balance de energía con fuentes de calor

$$\left\{\begin{matrix} velocidad\ de \\ entrada\ de \\ energía\ calorífica \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} velocidad\ de \\ salida\ de \\ energía\ calorífica \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} velocidad\ de \\ producción\ de \\ energía\ calorífica \end{matrix}\right\} = 0$$

Efecto Joule



Producción uniferme de calor por disipación eléctrico S_e
$q_r|_r$
$q_r|_{r+\Delta r}$
Entrada de calor por conduc.
Salida de calor por conducción
r
Δr
R

Balance

$$\left\{\begin{matrix} velocidad\ de \\ entrada\ de \\ energía\ calorífica \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} velocidad\ de \\ salida\ de \\ energía\ calorífica \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} velocidad\ de \\ producción\ de \\ energía\ calorífica \end{matrix}\right\} = 0$$

$$(2\pi rL)(q_r|_r) - (2\pi(r + \Delta r)L)(q_r|_{r+\Delta r}) + (2\pi r\Delta rL)S_e = 0$$

S_e es la velocidad de generación de energía por unidad de volumen

Ecuación más Condiciones a la frontera

$$\left\{\lim_{\Delta r\to 0}\frac{rq_r|_{r+\Delta r}-(rq_r)|_r}{\Delta r}\right\}=S_e r$$

$$\frac{d}{dr}(rq_r)= S_e r$$

$$para\, r=0 \quad q_r \;\; no\; es\; infinito \qquad para\, r=R \quad T=T_0$$

Integración

$$q_r = \frac{S_e r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

$$\boxed{q_r = \frac{S_e r}{2}}$$

Cálculo de S_e:

S_e= Pot elec / Vol

Pot = I^2R (I = *I* A)   R = 1/Ke L/A

Vol= A L

$$S_e = \frac{I^2}{k_e}$$

Comentarios.

- A ley de Ohm escrita en términos de la conductividad eléctrica y de la densidad de corriente es:

$$I = k_e \frac{E}{L}$$

Como $$S_e = \frac{I^2}{k_e}$$

La cantidad de energía generada por unidad de volumen aumenta con la diferencia de potencial y con la resistividad.

Perfil de temperaturas

- Ley de Fourier:

$$-k\frac{dT}{dr} = \frac{S_e r}{2}$$

$$T = -\frac{S_e r^2}{4k} + C_2 \qquad C_2\ es\ igual\ a\ T_0 + (S_e R^2/4k)$$

$$T - T_0 = \frac{S_e R^2}{4k}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Comentarios

- Se trata de un perfil parabólico
- Tiene su valor máximo cuando r=0
- Puede calcularse el incremento máximo de temperatura:

$$T_{max} - T_0 = \frac{S_e R^2}{4k}$$

- Puede calcularse el incremento medio de la temperatura:

$$\langle T \rangle - T_0 = \frac{S_e R^2}{8k}$$

Relación de la Temperatura máxima y la diferencia de potencial.

Para un alambre calentado mediante el efecto Joule, la máxima diferencia de temperaturas ocurre cuando r= 0 y viene dada por la expresión:

$$T - T_0 = \frac{S_e R^2}{4k}$$

La ley de Ohm escrita en términos de la conductividad eléctrica es:

$$I = k_e \frac{E}{L}$$

Relación de la Temperatura máxima y la diferencia de potencial.

- Sustituyendo esa expresión en la del término fuente

$$S_E = \frac{I^2}{k_e}$$

Y después ***Se*** en la expresión para la diferencia de temperaturas, se obtiene la relación entre la diferencia de potencial ***E*** y la temperatura máxima.

$$T_{máx} - T_0 = \left(\frac{E^2R^2}{4L^2}\right)\left(\frac{k_e}{k}\right)$$

Vale la pena hacer notar que la temperatura máxima también dependerá de la relación de conductividades eléctrica y térmica, de la geometría del conductor, es decir de su radio y su longitud y de la temperatuta $\boldsymbol{T_0}$ en la superficie del conductor.

Ley de Wiedemann-Franz.

- Establece que el cociente de la conductividad calorífica y eléctrica es proporcional a la Temperatura absoluta:
- K/Ke = L T
- L a constante de proporcionalidad L es la constante de Lorenz y tiene un valor de: 2.44×10^{-8} W Ω K^{-2} n

Cálculo del flujo de calor en la superficie

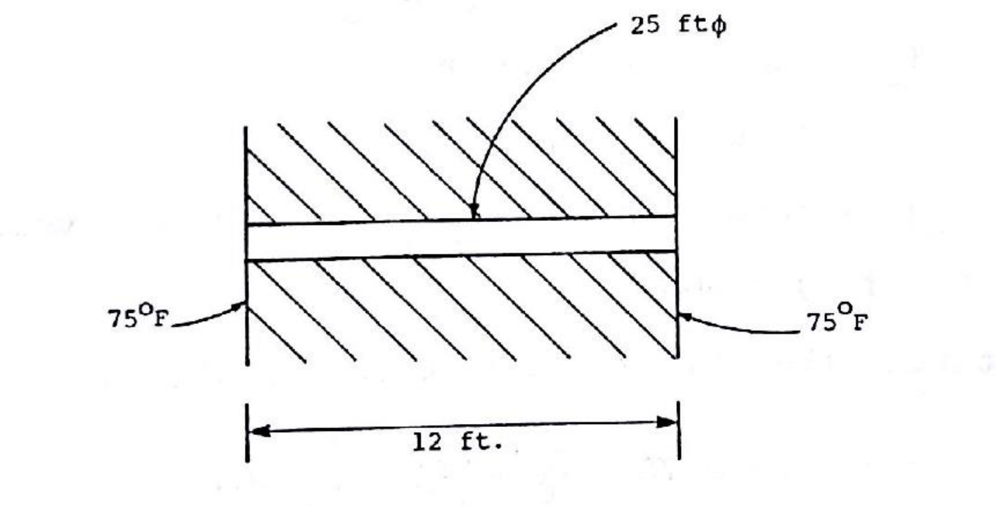
$$Q|_{r=R} = 2\pi RL \cdot q_r|_{r=\frac{I^2}{k_e}}$$

$$= 2\pi RL \cdot \frac{S_e R}{2}$$

$$= \pi RL \cdot S_e = \pi RL \ \frac{I^2}{k_e}$$

Ejemplo.

- Dos placas de cobre a temperatura de 75 F están separadas por una varilla de cobre (K= 220 BTU/Hr-Ft-F) de 0.25 In de diámetro y 1.2 ft de longitud. La varilla se suelda a las placas y el espacio entre ellas se llena con un aislante que también aísla las caras laterales de la varilla.
- Encuentre la corriente máxima que la varilla puede llevar si existe la restricción de no exceder 300 F en ningún punto. (La resistencia eléctrica del cobre es 5.3 X 10 $^{-8}$ Ohm/ft.



Ecuación, Condiciones Iniciales y Solución.

- Ecuación de balance:
- $$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q'}{k} = 0$$

Solución:

$$T(x) = T_b + \frac{q'L^2}{8k}\left[1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right]$$

¿Condiciones iniciales?

- En X = 0 T(X) no debe rebasar 300 F

$$T(x) = T_b + \frac{q'L^2}{8k}\left[1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right]$$

- Sustituyendo:

$$300 = 75 + \frac{q'(1.2)^2}{8 \times 220}(1 - 0)$$

$$q' = 225 \times \frac{8 \times 220}{(1.2)^2}$$

$$= 275{,}000 \text{ Btu/hr-ft}^3$$

- Recordando que $q' = \frac{q}{volume}$ Y que $q = RI^2$

$$q' = \frac{RI^2}{volume}$$

- Calculamos R

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

$$R = 5.3 \times 10^{-8} \times \frac{1.2}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{0.25}{12}\right)^2}$$

$$= 1.87 \times 10^{-4} \text{ ohms.}$$

Sustituimos:

$$q' = \frac{RI^2}{\text{volume}}$$

$$275{,}000 = \frac{1.87 \times 10^{-4} \times I^2}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{0.25}{12}\right)^2 \times 1.2} \times 3.413$$

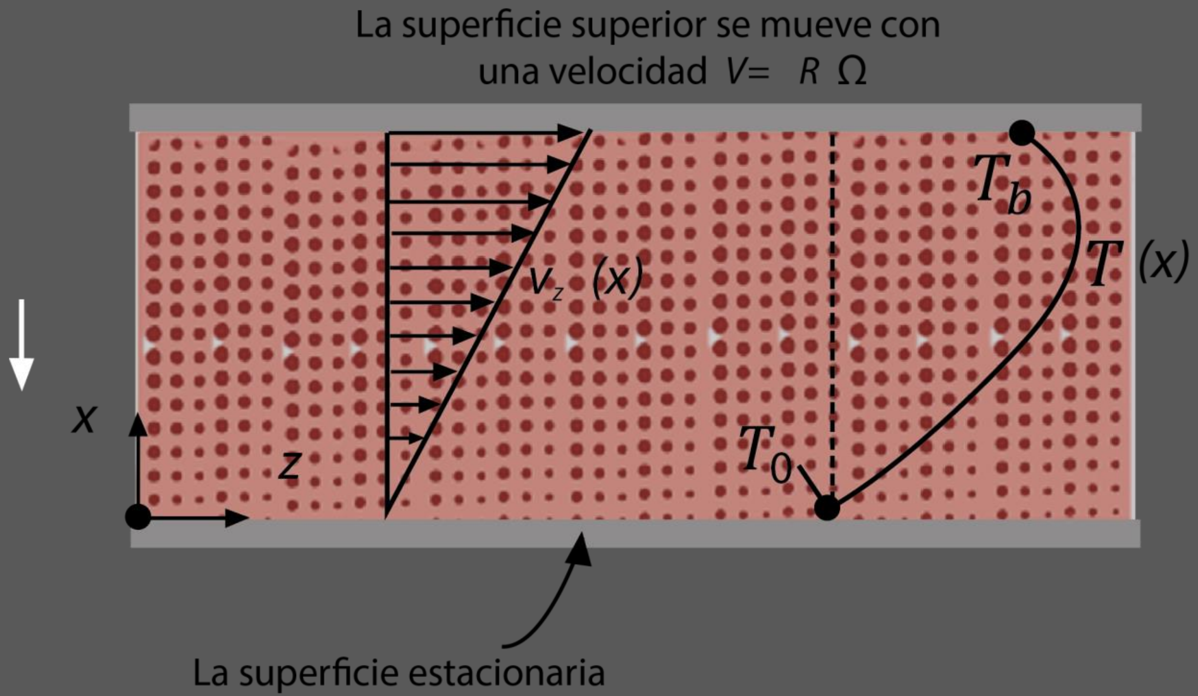
Despejando:

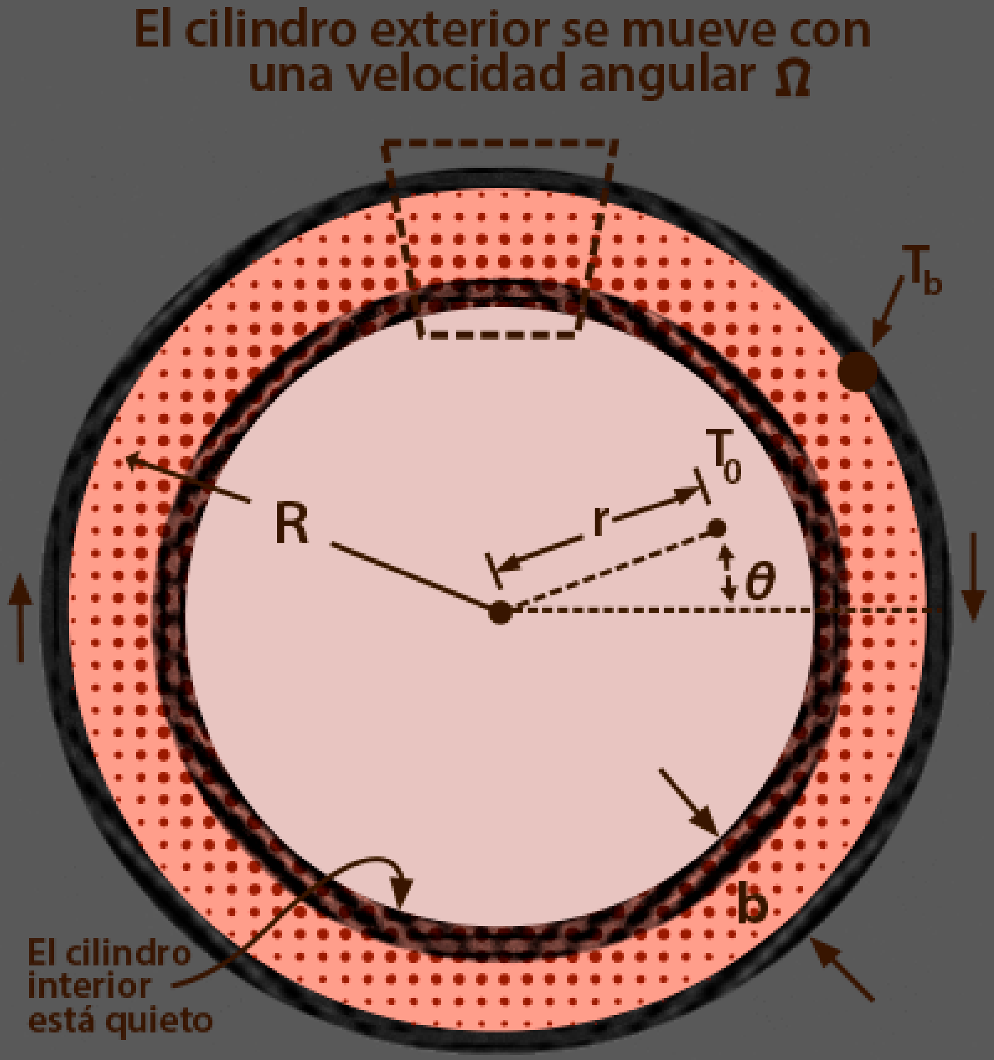
$$I = \left[275{,}000 \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{0.25}{12}\right)^2 \times \frac{1.2}{3.413} \times \frac{1}{1.87 \times 10^{-4}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 420 \text{ amps.}$$

Viscosidad

$$S_v = -\tau_{xz}\left(\frac{dv_z}{dx}\right) = \mu\left(\frac{dv_z}{dx}\right)^2$$





Análogamente [1]

- 1. Resuelto con la aproximación de fluido entre dos placas paralelas de pequeño espesor (rendija)

Balance	$WLq_x\|_x - WLq_x\|_{x+\Delta z} + WL\Delta_{x\mu}\left(\frac{V}{b}\right)^2 = 0$
Ecuación diferencial para q + Cl	$\frac{dq_\infty}{dx} = \mu\left(\frac{V}{b}\right)^2$
Integración para q	$q_x = \mu\left(\frac{V}{b}\right)^2 x + C_1$
Ecuación de Fourier	$-k\frac{dT}{dx} = \mu\left(\frac{V}{b}\right)^2 x + C_1$
Integración para T	$T = -\left(\frac{\mu}{k}\right)\left(\frac{V}{b}\right)^2 \frac{x^2}{2} - \frac{C_1}{k}x + C_2$
Perfil de temperaturas	$\frac{\boldsymbol{T - T_0}}{\boldsymbol{T_b - T_0}} = \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{b}}\right) + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{Br}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{b}}\right)\left[\boldsymbol{1} - \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{b}}\right)\right]$

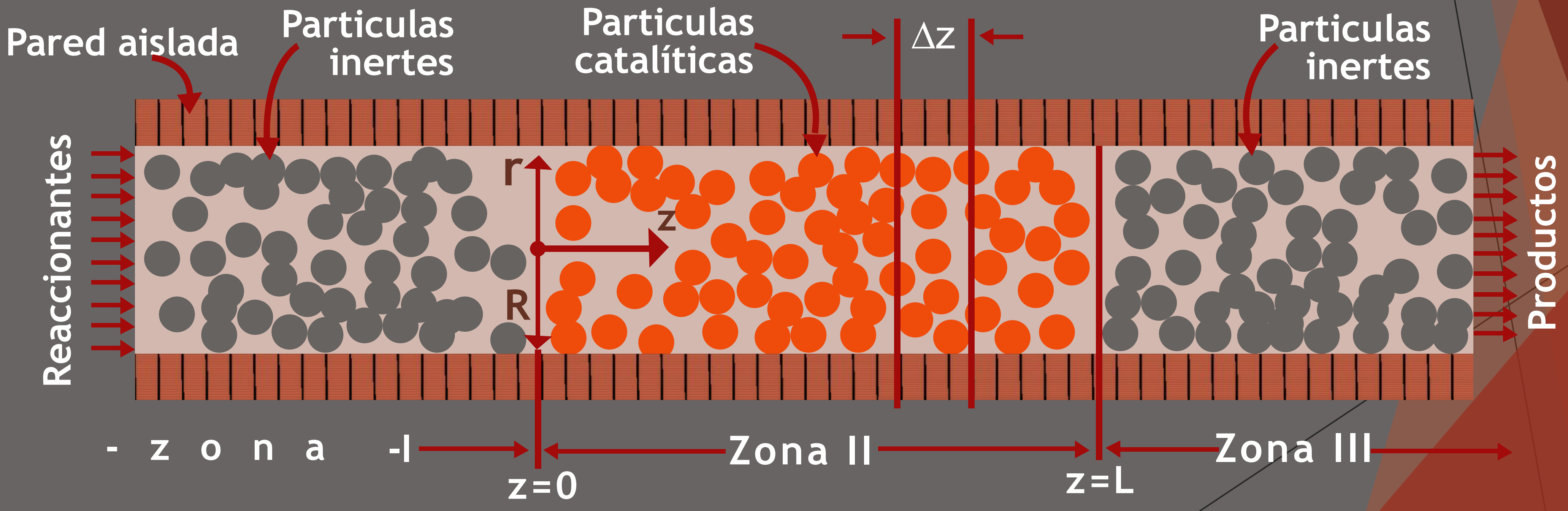
Número de Brinkman

$$Br = [\mu V^2 / k(\boldsymbol{T_b} - \boldsymbol{T}_0)]$$

Reacción química

$$S_e = S_{C1}\left(\frac{T - T''}{T_1 - T_0}\right)$$

S_{C1} y T_0 Son constantes empíricas



Análogamente

- El problema se resuelve por zonas. Sólo en la zona 2 existe generación de calor.

Balance	$\frac{q_Z\|_{Z+\Delta Z} - q_Z\|_Z}{\Delta z} + \rho_1 v_1 \acute{C}_v \frac{T\|_{Z+\Delta Z} - T\|_Z}{\Delta z} = S_e$
Ecuación diferencial para q+Cl	$\frac{dq_z}{dz} + p_1 v_1 C_p \frac{dT}{dz} = S_c$
Integración para q	
Ecuación de Fourier (Zona 2).En las zonas 1 y 3 S_c=0	$-k_{z,ef} \frac{d^2T}{dz^3} + p_1 v_1 C_p \frac{dT}{dz} = S_c$

Adimensionalización

$$Z = \frac{z}{L}$$

$$\Theta = \frac{T - T^{\circ}}{T_1 - T^{\circ}}$$

$$B = \frac{\rho_1 v_1 \hat{C}_p L}{k_{z,\mathrm{ef}}}$$

$$N = \frac{S_{e1} L}{\rho_1 v_1 \hat{C}_p (T_1 - T^{\circ})}$$

Perfil de temperaturas

Integración para T	$\theta^{II} = C_3 e^{m_3 z} + C_4 e^{m_4 z} \quad (para\ m_3 \neq m_4)$
Perfil de temperaturas	$\theta^{II} = \left(\frac{m_4 e^{m_4} e^{m_3 z} - m_3 e^{m_3} e^{m_4 z}}{m_4^2 e^{m_4} - m_3^3 e^{m_3}}\right)(m_3 + m_4)$

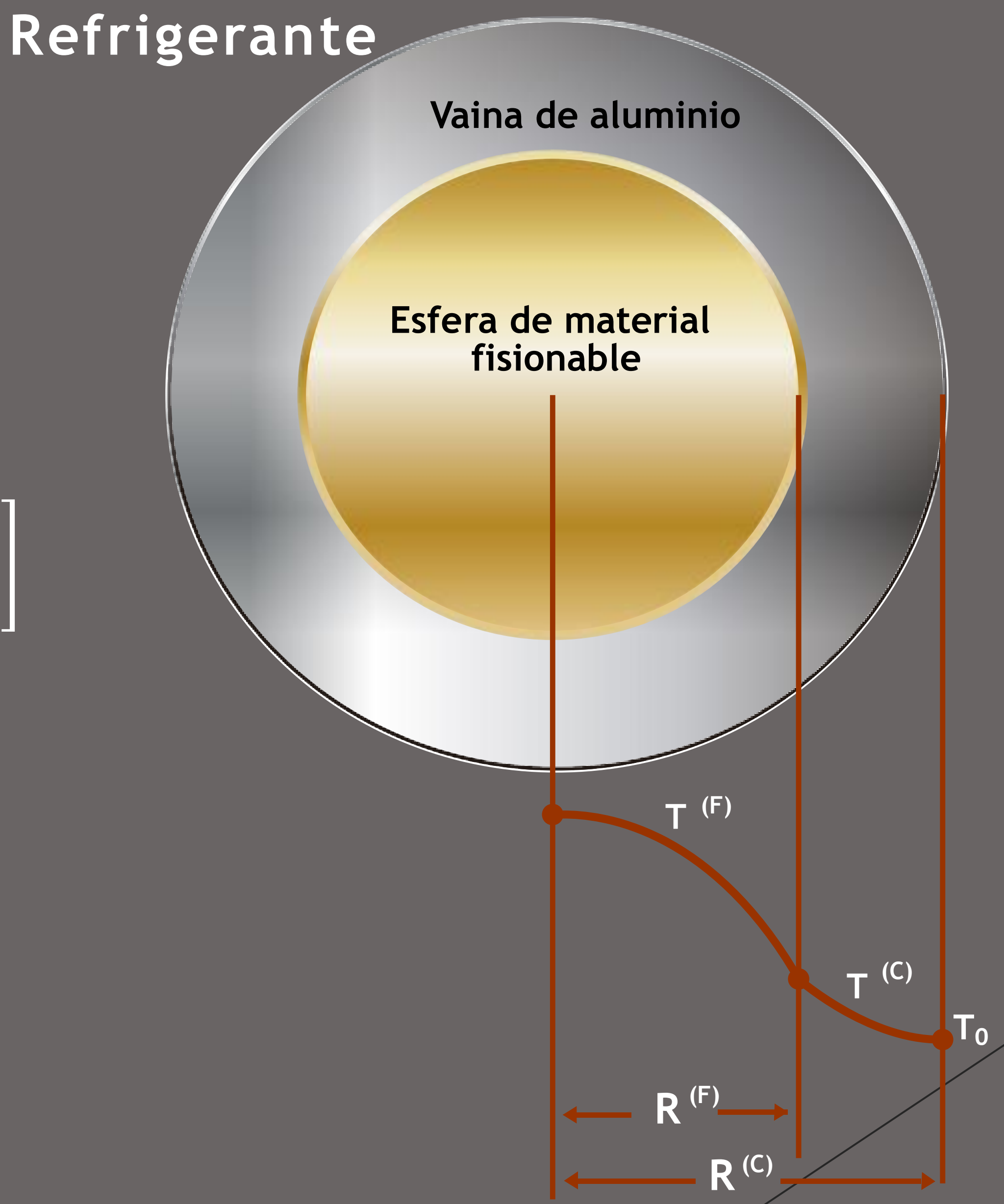
$$m_3 = \frac{1}{2} B \left(1 - \sqrt{1 - (4N/B)}\right)$$

$$m_4 = \frac{1}{2} B \left(1 + \sqrt{1 - (4N/B)}\right)$$

Comentario:
El perfil de temperaturas es una suma de exponenciales.
Las constantes de altura y crecimiento dependen de N y B
Que son funciones de los materiales, de las condiciones de flujo y de la geometría.

Reacciones nucleares

$$S_n = S_{n0}\left[1 - b\left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^2\right]$$



Análogamente (También se resuelve por zonas).

Ecuación diferencial para q +Cl

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 q_{r^{(F)}}\right) = S_{n0} r^2 \left[1 + b\left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^2\right]$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 q_r^{(C)}\right) = 0$$

Integración para q

$$q_{r^{(F)}} = S_{n0}\left(\frac{r}{3} + \frac{b}{R^{(F)2}}\frac{r^3}{5}\right)$$

$$q_{r^{(C)}} = S_{n0} R^{(F)^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5}\right)\frac{1}{r^2}$$

Ecuación de Fourier

$$-k^{(F)}\frac{dT^{(F)}}{dr} = S_{n0}\left(\frac{r}{3} - \frac{b}{R^{(F)2}}\frac{r^3}{5}\right)$$

$$-k^{(C)}\frac{dT^{(C)}}{dr} = S_{n0} R^{(F)^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{5}\right)\frac{1}{r^2}$$

Integración para T

$$T^{(F)} = -\frac{S_{n0}}{k^{(F)}}\left(\frac{r^2}{6} - \frac{b}{R^{(F)^2}}\frac{r^4}{20}\right) + C_2^{(F)}$$

$$T^{(C)} = +\frac{S_{n0}}{k^{(C)}}R^{(F)^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{b}{5}\right)\frac{1}{r} + C_2^{(C)}$$

Perfil de temperaturas

$$T^{(F)} - T_0 = -\frac{S_{n0}R^{(F)2}}{6k^{(F)}}\left\{\left[1-\left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^2\right] - \frac{3}{10}b\left[1-\left(\frac{r}{R^{(F)}}\right)^4\right]\right\} + \frac{S_{n0}R^{(F)2}}{3k^{(C)}}\left(1-\frac{3}{5}b\right)\left(1-\frac{R^{(F)}}{R^{(C)}}\right)$$

$$T^{(C)} - T_0 = -\frac{S_{n0}R^{(F)2}}{3k^{(C)}}\left(1-\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{R^{(F)}}{r} - \frac{R^{(F)}}{R^{(C)}}\right)$$

Cuestionario(1/2).

- ¿De dónde proviene el término de generación de calor en el caso de a) Efecto Joule, b)Viscosidad, c)Reacción química y d) Reacción nuclear.
- ¿Cuál es la expresión matemática de los términos de fuente da calor en cada uno de los casos anteriores?
- ¿La cantidad de calor generada al interior de un alambre conductor aumenta o disminuye a) con la diferencia de potencial a través de él, b) con la resistencia del alambre?
- ¿Qué forma tiene el perfil de temperaturas en el caso de un alambre conductor?
- ¿Cuál es la fórmula para calcular la temperatura máxima en un alambre conductor y de que variables depende?

Cuestionario (2/2)

- ¿Cuál es el flujo de calor en la superficie de una alambre conductor, de conductividad K y por el que circula una corriente I?
- ¿En qué consiste la aproximación de la rendija que se realiza para el flujo viscoso entre dos cilindros?
- ¿Cuál es la definición del número de Brinkman y qué mide?
- Comenta sobre los perfiles de temperatura en los casos de la reacción química y el reactor nuclear.