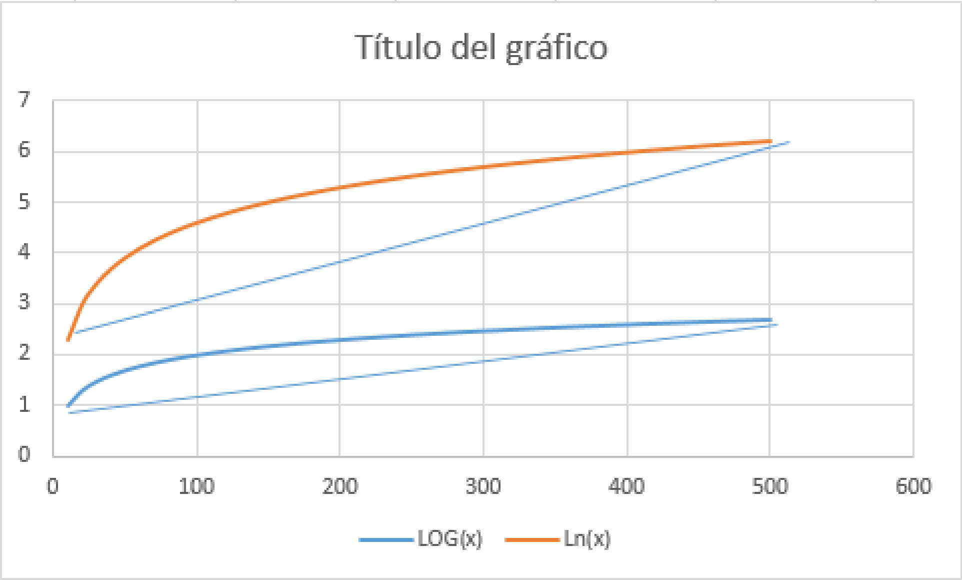
Conducción de calor en una aleta de enfriamiento

Algunos puntos.

- Gráfica logaritmos.
- Uso del Simulador. ¿Dónde está? ¿Cómo se usa?
- La hoja de Excel solicitada.

Gráfica logaritmos.

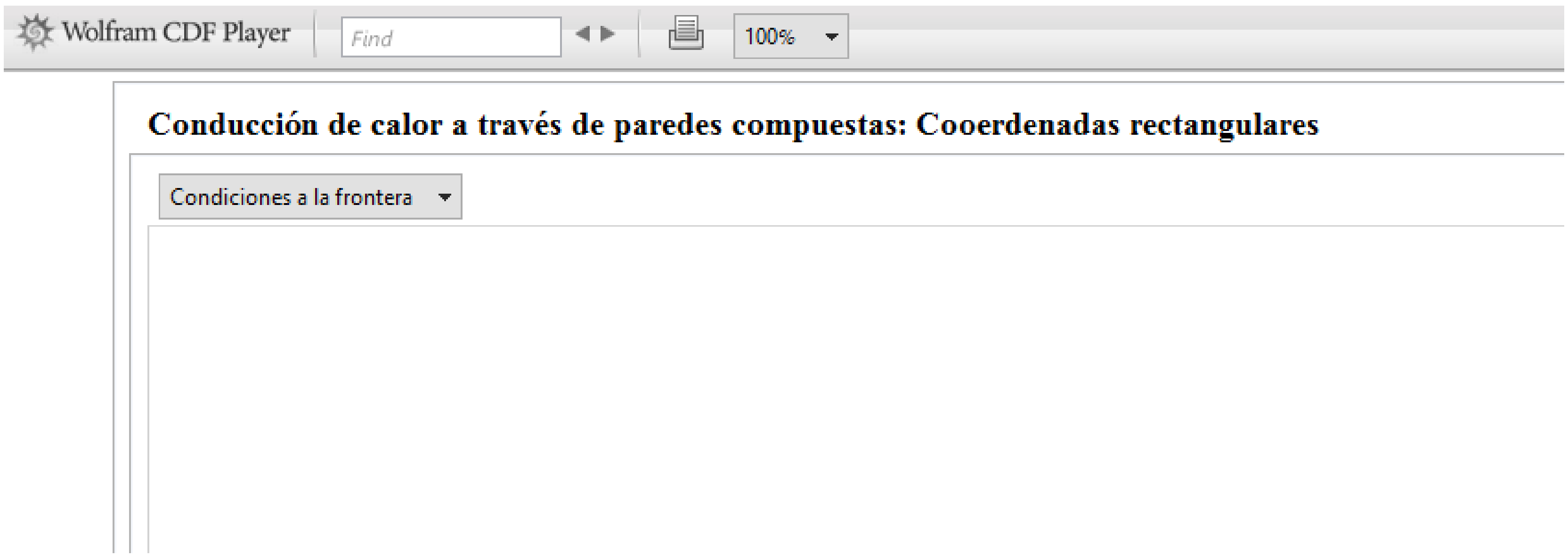
x	LOG(x)	Ln(x)
10	1	2.30258509
20	1.301029996	2.99573227
30	1.477121255	3.40119738
40	1.602059991	3.68887945
50	1.698970004	3.91202301
60	1.77815125	4.09434456
70	1.84509804	4.24849524
80	1.903089987	4.38202663
90	1.954242509	4.49980967
100	2	4.60517019
110	2.041392685	4.70048037
120	2.079181246	4.78749174
130	2.113943352	4.86753445
140	2.146128036	4.94164242
150	2.176091259	5.01063529
160	2.204119983	5.07517382
170	2.230448921	5.13579844
180	2.255272505	5.19295685
190	2.278753601	5.24702407



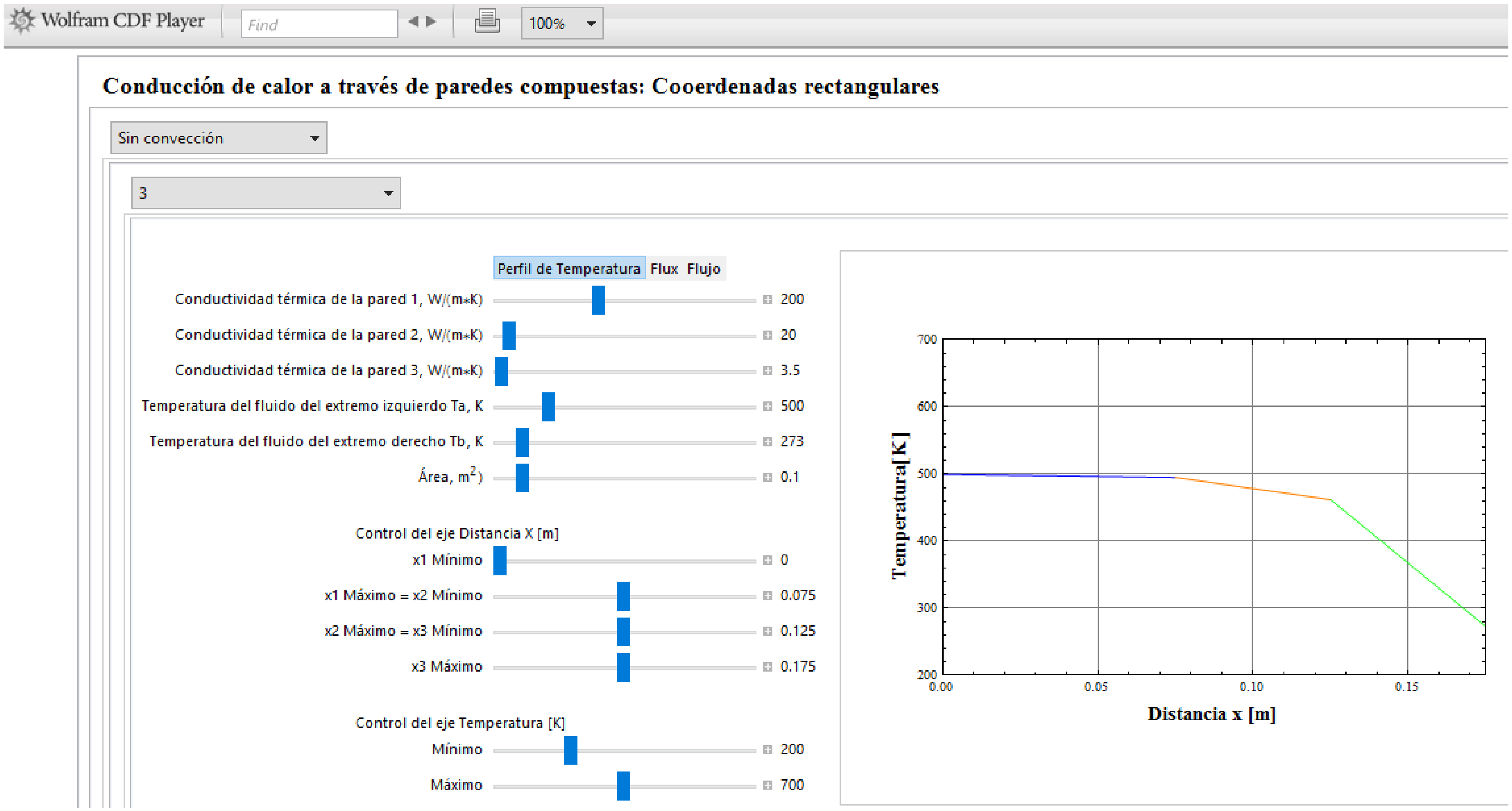
Uso del Simulador. ¿Dónde está? ¿Cómo se usa?

Uso del Simulador. ¿Dónde está? ¿Cómo se usa?

Uso del Simulador. ¿Dónde está? ¿Cómo se usa?



Uso del Simulador. ¿Dónde está? ¿Cómo se usa?



La hoja de Excel solicitada.

E2 =(F2-G2)/((LN(I2/H2)/N2)+(LN(J2/I2)/O2)+LN(K2/J2)/P2)

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	T1	T2	T3	r_0q_0	Ta	Tb	r_0	r_1	r_2	r_3	h_0	h3	K_{01}	K_{12}	K_{23}
2				3.85435593	250	90	0.025	0.02885	0.07885	0.12885			26.1	0.04	0.03

$$Q_0 = 2\pi L r_0 q_0 = \frac{2\pi L(T_a - T_b)}{\left(\frac{1}{r_0 h_0} + \frac{\ln r_1/r_0}{k^{01}} + \frac{\ln r_2/r_1}{k^{12}} + \frac{\ln r_3/r_2}{k^{23}} + \frac{1}{r_3 h_3}\right)}$$

Fenómeno a estudiar.

- Colocar aletas sobre un material conductor aumenta la cantidad de calor que se transmite a los alrededores.

Objetivos.

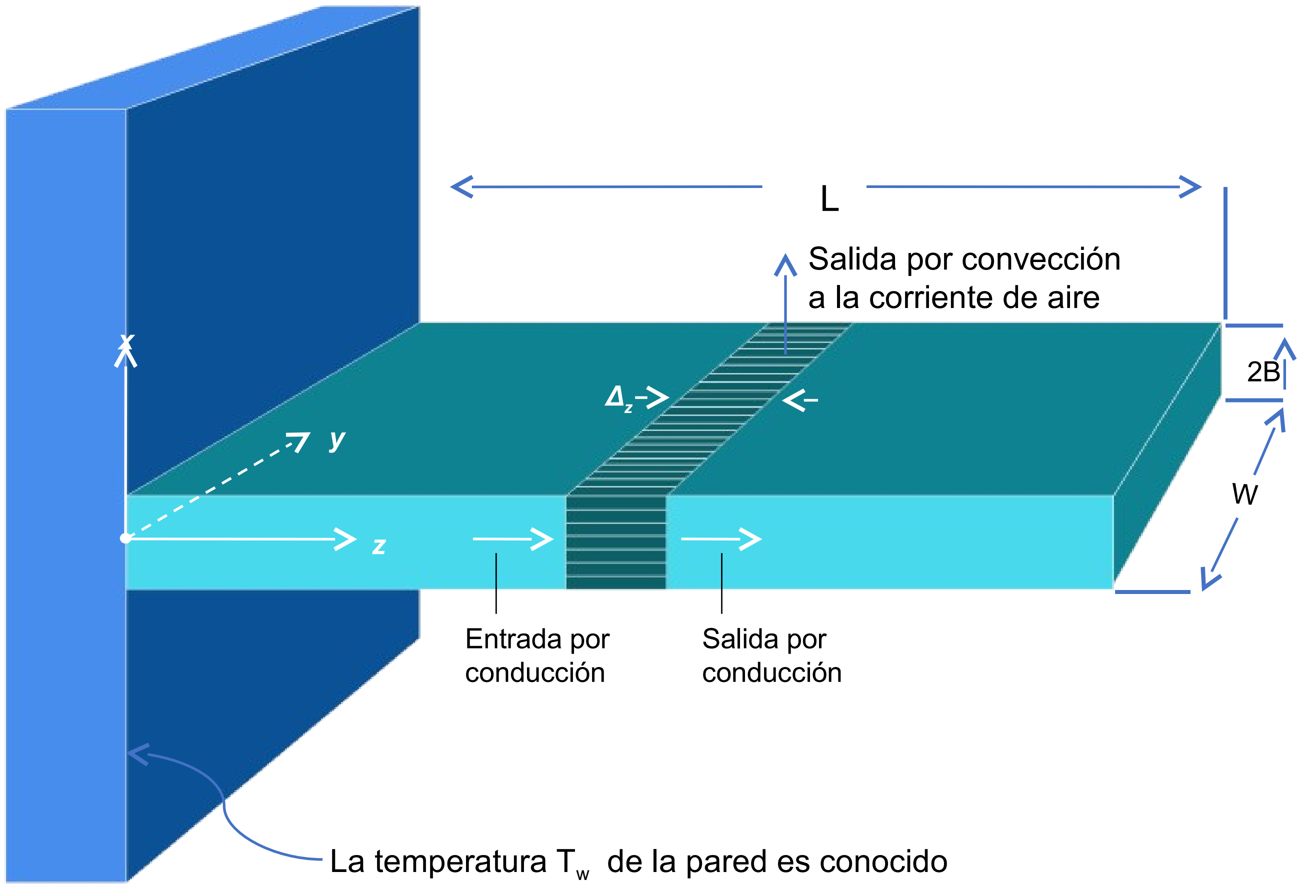
a) Comprender el mecanismo por el cual la colocación de aletas ayuda a aumentar la tasa de transferencia de calor.

b) Conocer las ecuaciones para el cálculo del perfil de velocidades, el flujo de calor y la eficiencia de una aleta rectangular

c) Calcular el flujo de calor, el perfil de temperaturas y la eficiencia cuando se usa una aleta rectangular.

d) Conocer la metodología de solución en el caso de aletas circulares.

Diagrama



L
Salida por convección
a la corriente de aire
x
y
z
2B
W
Entrada por
conducción
Salida por
conducción
La temperatura T_w de la pared es conocido

Hipótesis

Caso Real

1. T es función de z y x pero la influencia de z es más importante.
2. Por el extremo de la aleta (área 2BW) y los bordes (área 2BL +2BL) se pierde una pequeña cantidad de calor.
3. El coeficiente de transmisión de calor es función de la posición.

Modelo

1. T es sólo función de z.
2. No hay pérdida de calor por el extremo y los bordes.
3. La densidad de flujo de calor en la superficie viene dada por $q = h(T - T_a)$, en la que h es constante y $T = T(z)$.

Ecuación

Aplicando un balance de energía a un segmento **ΔZ** de la aleta,

Aplicando un balance de energía a un segmento ΔZ de la aleta,

$$\boldsymbol{q_z\Big|_z * 2BW \; - q_z\Big|_{z+\Delta z} * 2BW - h(2W\Delta z)(T - T_a) = 0}$$

Dividiendo por **2BW Δ Z** y pasando al límite cuando **Δ Z** tiende a cero

Dividiendo por **2BW Δ Z** y pasando al límite cuando **Δ Z** tiende a cero

$$\boldsymbol{-\frac{dq_z}{dz} = \frac{h}{B}\;(T - T_{\alpha})}$$

Introduciendo la ley de Fourier **(q_z = - kdT/dz)**

Introduciendo la ley de Fourier **(q_z = - kdT/dz)**

$$\boldsymbol{\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{h}{kB}\;(T - T_a)}$$

Condiciones a la frontera

- C.L. 1 : para $z = 0$ $T = T_W$
- C.L. 2 : para $z = L$
  $dT/dz = 0$

Variables adimensionales

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{T - T_a}{T_a - T_w} = \text{temperatura adimensional}$$

temperatura adimensional

$$\boldsymbol{\zeta} = \frac{z}{L} = \text{distancia adimensional}$$

distancia adimensional

$$\boldsymbol{N} = \sqrt{\frac{hL^2}{kB}} = \text{coeficiente adimensional de transmisión de calor}$$

coeficiente adimensional de transmisión de calor

Planteo en términos adimensionales

$$\frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} = N^2\Theta \quad con \quad \Theta|_{\zeta=0} = 1 \quad y \quad \left.\frac{d\Theta}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} = 0$$

Solución

$$\boldsymbol{\Theta} = \frac{\cosh N(1 - \zeta)}{\cosh N}$$

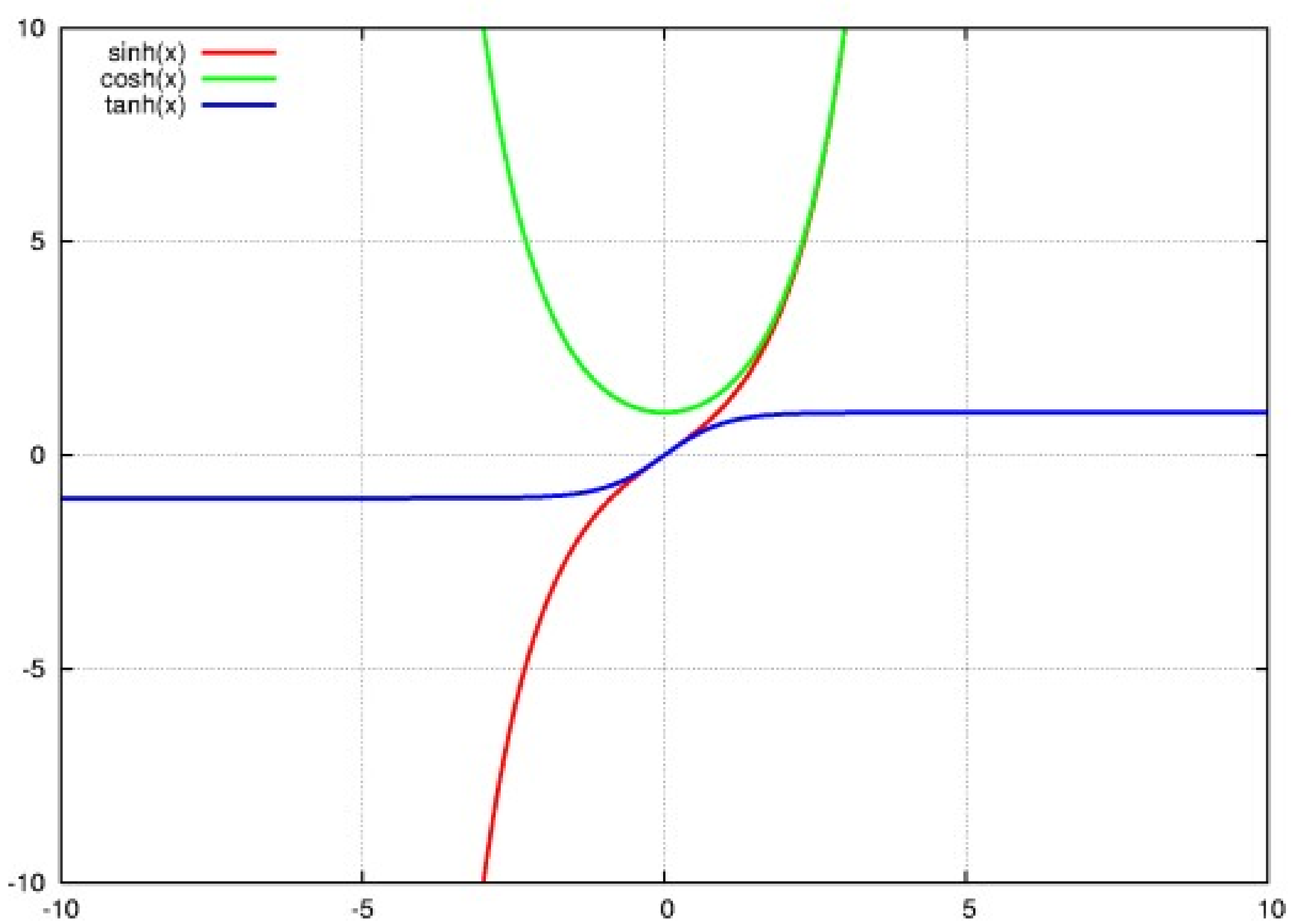
Esta expresión es solamente aceptable si las pérdidas de calor en los bordes son despreciables.

Funciones hiperbólicas

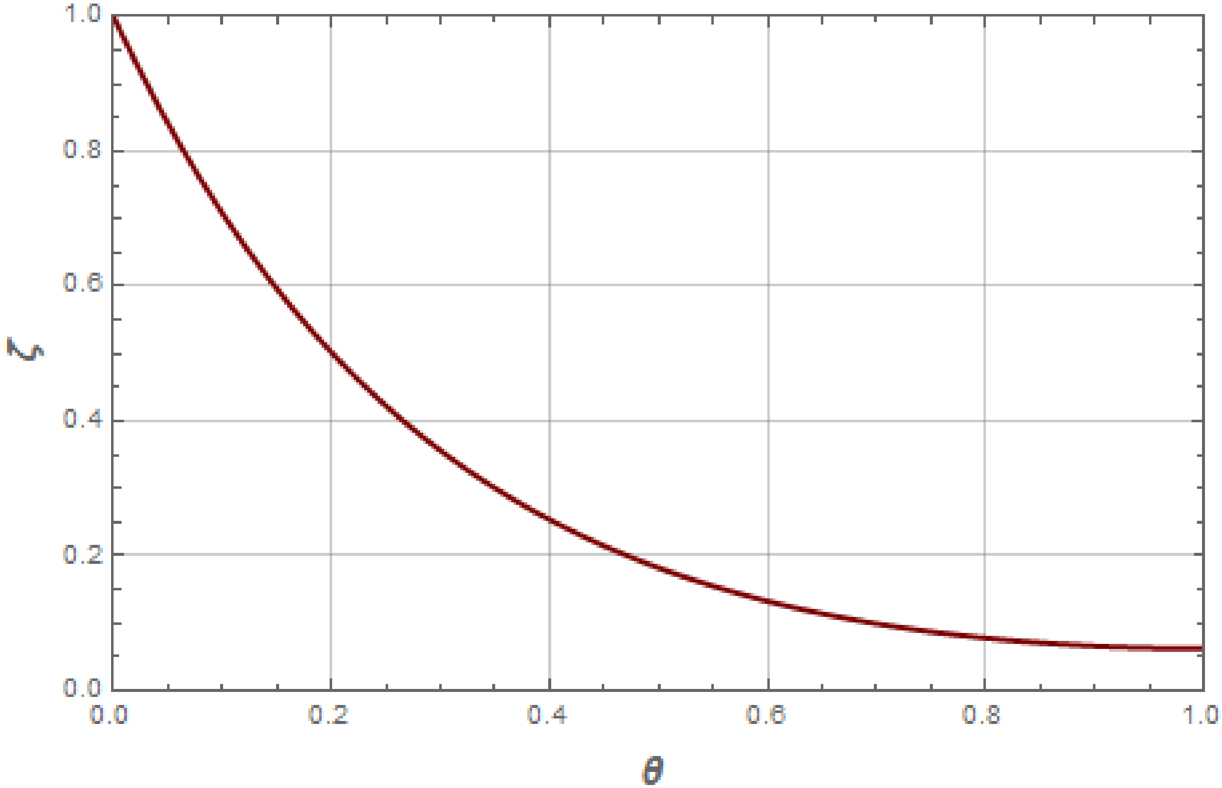
$$\boldsymbol{senh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}}$$

$$\boldsymbol{cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}}$$

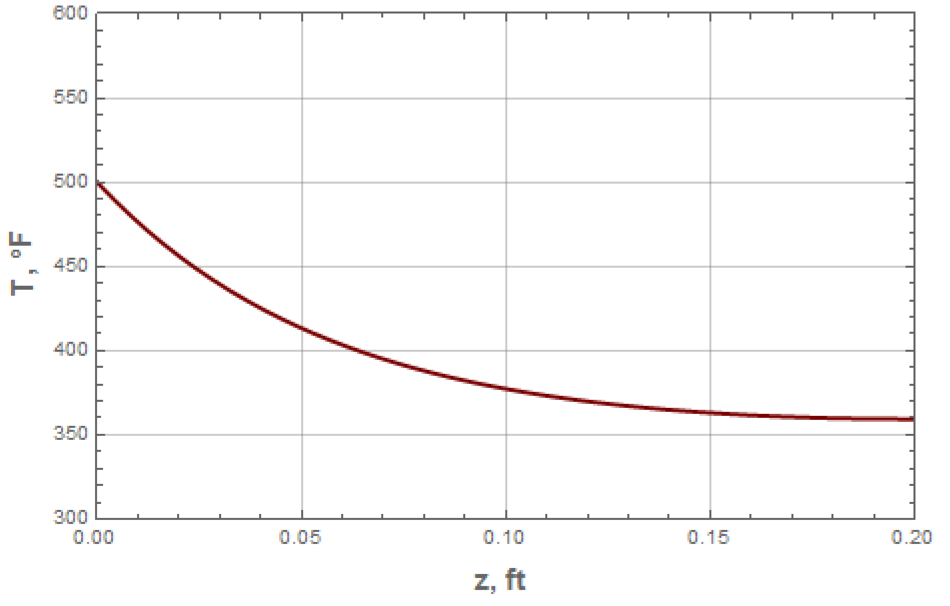
Gráfica



Temperatura adimensional.



Temperatura dimensional



Flujo de calor y eficacia de una aleta

$$q = 2\int_0^w \int_0^L h(T - T_a)\, dz\, dy$$

La eficacia de una aleta se define:

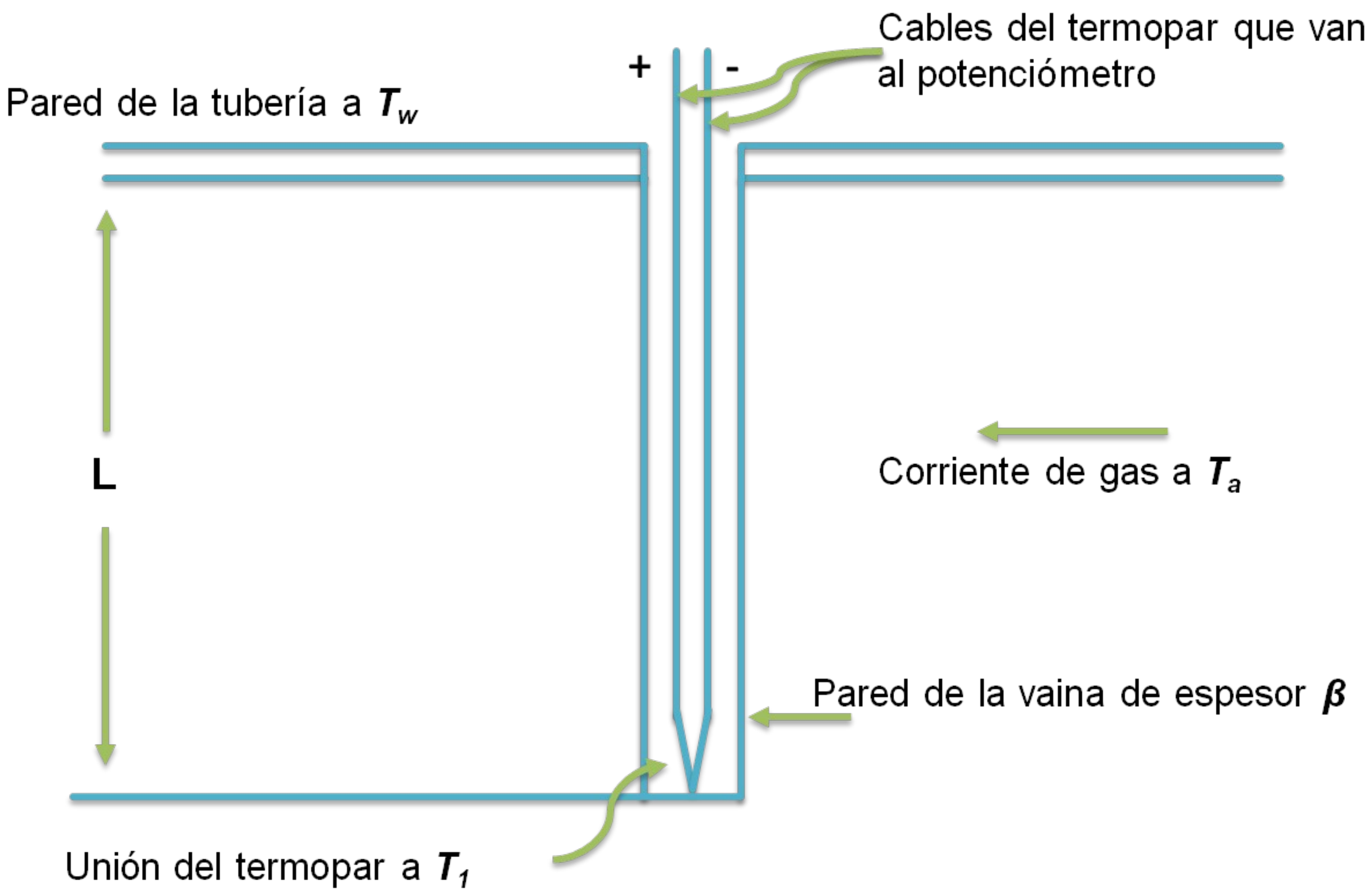
$$n = \frac{(calor\ disipado\ por\ la\ superficie\ de\ la\ aleta)}{\begin{bmatrix} calor\ que\ se\ disiparia\ si\ la\ superficie\ se \\ mantuviese\ a\ Tw\ (sin\ variar\ h) \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{n = \frac{\int_0^w \int_0^L h(T - T_a)\, dz\, dy}{\int_0^w \int_0^L h(T_w - T_a)\, dz\, dy}}$$

$$\boldsymbol{n = \frac{\int_0^1 \Theta\, d\zeta}{\int_0^1 d\zeta}}$$

$$\frac{1}{\cosh N}\left(-\frac{1}{N}\operatorname{senh} N(1-\ \zeta)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\tanh N}{N}$$

Ejemplo. Error en la medida de un



Datos

- T_l = 260^0 C = temperatura que señala el termopa
- T_w = 177^0 C = temperatura de la pared
- h = 0,0167 cal cm^{-2} seg^{-1} ^{0}C^{-l}
- k = 0,250 cal cm $^{-1}$ seg^{-1} ^{0}C^{-l}
- B = 0.20 cm = espesor de pared de la vaina
- L=6cm

Solución

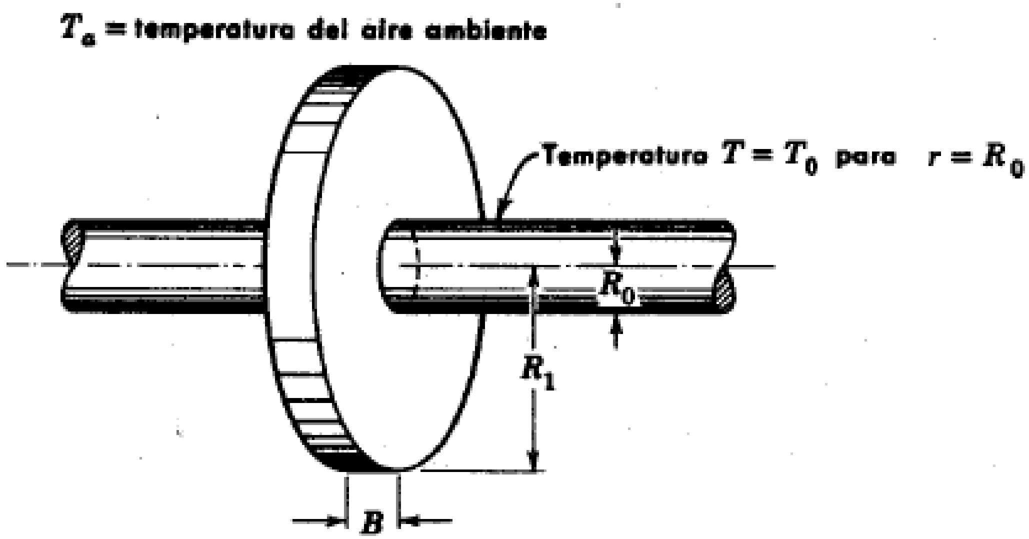
$$\frac{T_1 - T_a}{T_w - T_a} = \frac{\cosh 0}{\cosh N}$$

$$= \frac{1}{\cosh \sqrt{hL^2/kB}}$$

$$= \frac{1}{\cosh \sqrt{(0,0167)(6)^2/(0.25)(0,2)}}$$

$$\frac{1}{\cosh 2\sqrt{3}} = \quad = \frac{1}{16.0}$$

Ejercicio: Analizar el caso de la aleta Circular



Escritura de las ecuaciones.

$$\boxed{\frac{d^2}{dr^2}\cdot\theta+\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\cdot\theta-n^2\cdot\theta=0} \qquad \boxed{n=\sqrt{\frac{2\cdot h}{k\cdot e}}}$$

Con la solución:

$$\boxed{\theta(x)=C_1\cdot I(n\cdot r)_0+C_2\cdot K(n\cdot r)_0}$$

***I* y *K*:** *funciones modificadas de Bessel de primera y segunda especie, orden 0.*

Ecuación de Bessel.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu)^2 y = 0$$

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

Función de Bessel de 1ª especie de orden cer

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)\right]$$

$Y_0(x)$ que es la función de Bessel de 2ª especie de orden 0

con $\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = 0{,}5772156649015329...$, la llamada constante de Euler.

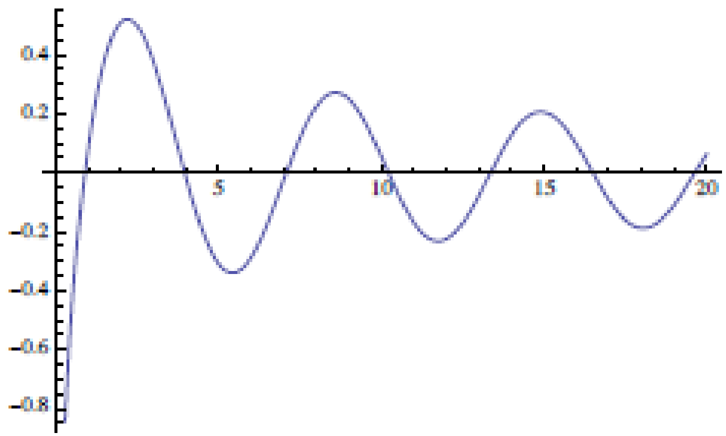
La segunda solución de la ecuación de Bessel es así:

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{(m!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

In[12]:=

```
Plot[BesselY[0, x], {x, 0, 20}]
```

Out[12]=



Alternativamente

A partir de la expresión de la eficiencia es posible calcular el flujo si se conoce la eficiencia
En realidad se trata de soluciones de la ecuación de balance.

$$n = \frac{\int_0^w \int_0^L h(T - T_a)\,dz\,dy}{\int_0^w \int_0^L h(T_w - T_a)\,dz\,dy}$$

$$\int_0^w \int_0^L h(T - T_a)\,dz\,dy = n \int_0^w \int_0^L h(T_w - T_a)\,dz\,dy$$

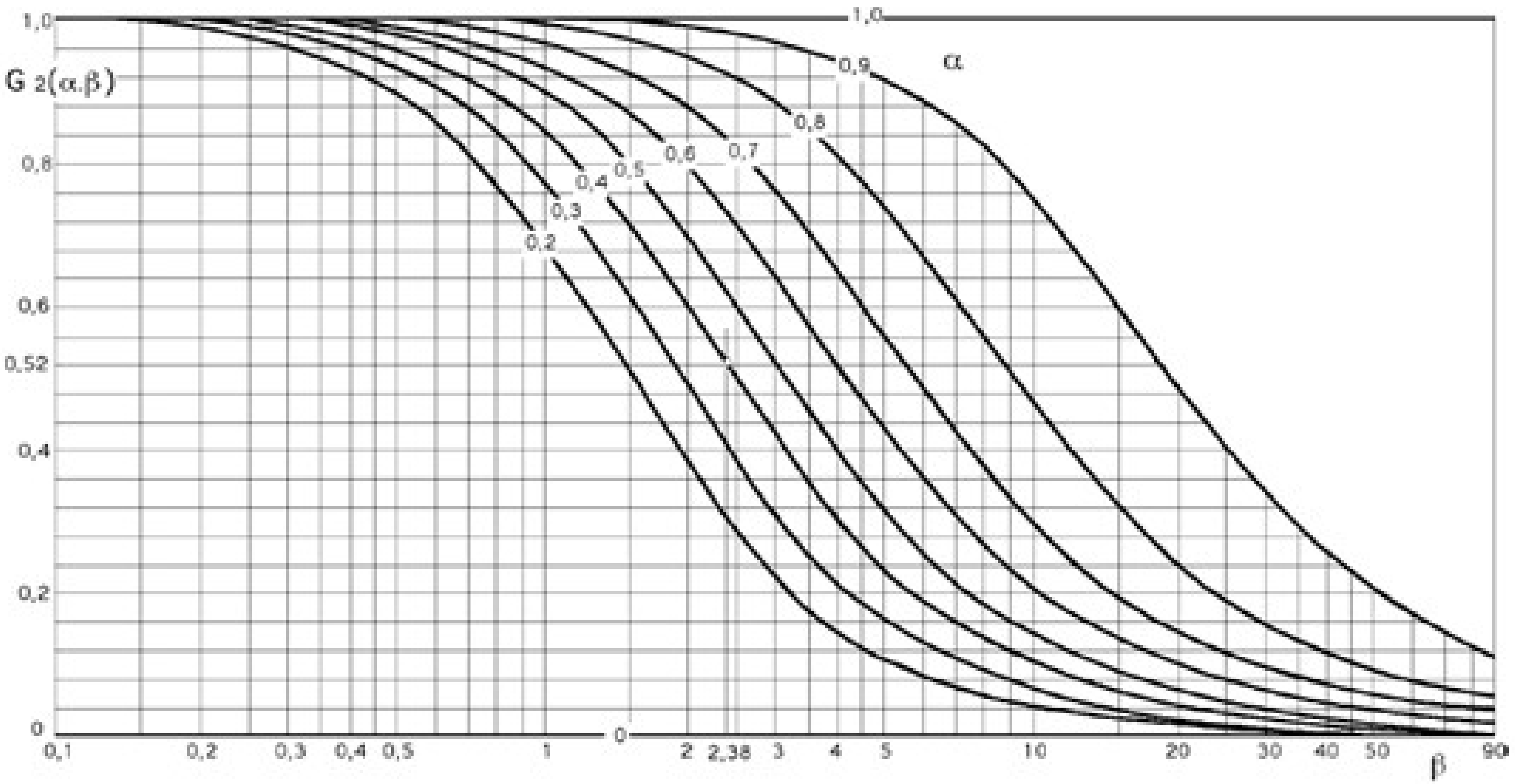
Para la aleta circular:

$$Q = \pi\,(1 - \alpha_{an}^2)\,k\,e\,\Phi_b\,\beta_{an}^2\,G_2(\alpha_{an}\beta_{an}) \qquad \alpha_{an} = \frac{r_b}{r_e} \;;\; \beta_{an} = \sqrt{\frac{2\,r_e^2\,h_{C\,ext}}{k\,e}}$$

$$\Phi_b = T_b - T_F$$

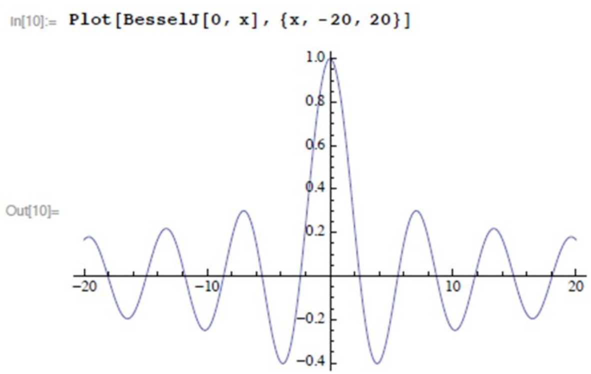
uchas veces el parámetro a calcular no es el flux, ni la temperatura, sino la efici

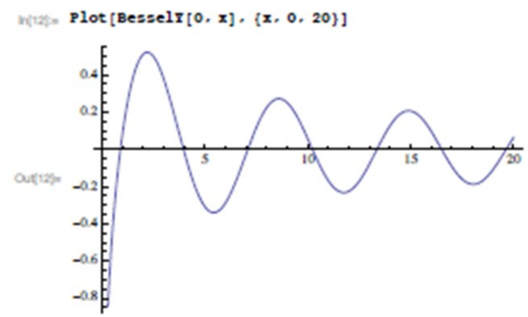
xisten tablas de la eficiencia en función de los diferentes parámetros.



Estas gráficas son de alguna manera gráficas de las soluciones de la ecuación.

Hoy pueden calcularse las soluciones con el uso de softwares como Mathematic
Y no es necesario recurrir a gráficas.





Cuestionario.

¿Cuál es la ecuación que describe la variación de la temperatura con la posición en el caso de una aleta rectangular?

¿Qué hipótesis simplificadoras se hicieron para llegar a ellas?

¿Cuáles son las condiciones a la frontera en esa ecuación?

¿Por qué es conveniente introducir variables

Cuestionario.

¿Cómo se definen las variables adimensionales y qué forma toma la ecuación adimensional, escrita en términos de ellas?

¿Cómo se definen las funciones hiperbólicas Senh (x) y Cosh (x)?

¿Cuál es la fórmula para calcular el flujo de calor desde la aleta?

¿Cómo se relaciona el flujo de calor desde la aleta

Cuestionario.

¿Qué significa una eficiencia de uno?

¿Cuál es la ecuación que describe la variación de la temperatura con el radio, en el caso de una aleta anular?

¿Cuál es la temperatura como función de r, en el caso de la aleta radial?

¿Cuál es la expresión para el flux de calor en la aleta anular?

Trabajo en equipo y próxima práctica.