Paredes compuestas

Menú

- Descripción del problema
- Objetivos.
- Paredes compuestas rectangulares
- Paredes compuestas cilíndricas
- Diferencias y semejanzas entre el caso de geometría cartesiana y el de geometría cilíndrica.
- Resistencia de contacto
- Ejemplos
- Principales dificultades
- Cuestionario.

Paredes Compuestas. Problema

Se desea estudiar la transferencia de calor a través de una sucesión de capas de diferentes materiales, cuyas fronteras están en contacto con un fluido.

Se quiere hacerlo en dos geometrías:

a) Cartesiana (paredes rectangulares)
b) Cilíndrica

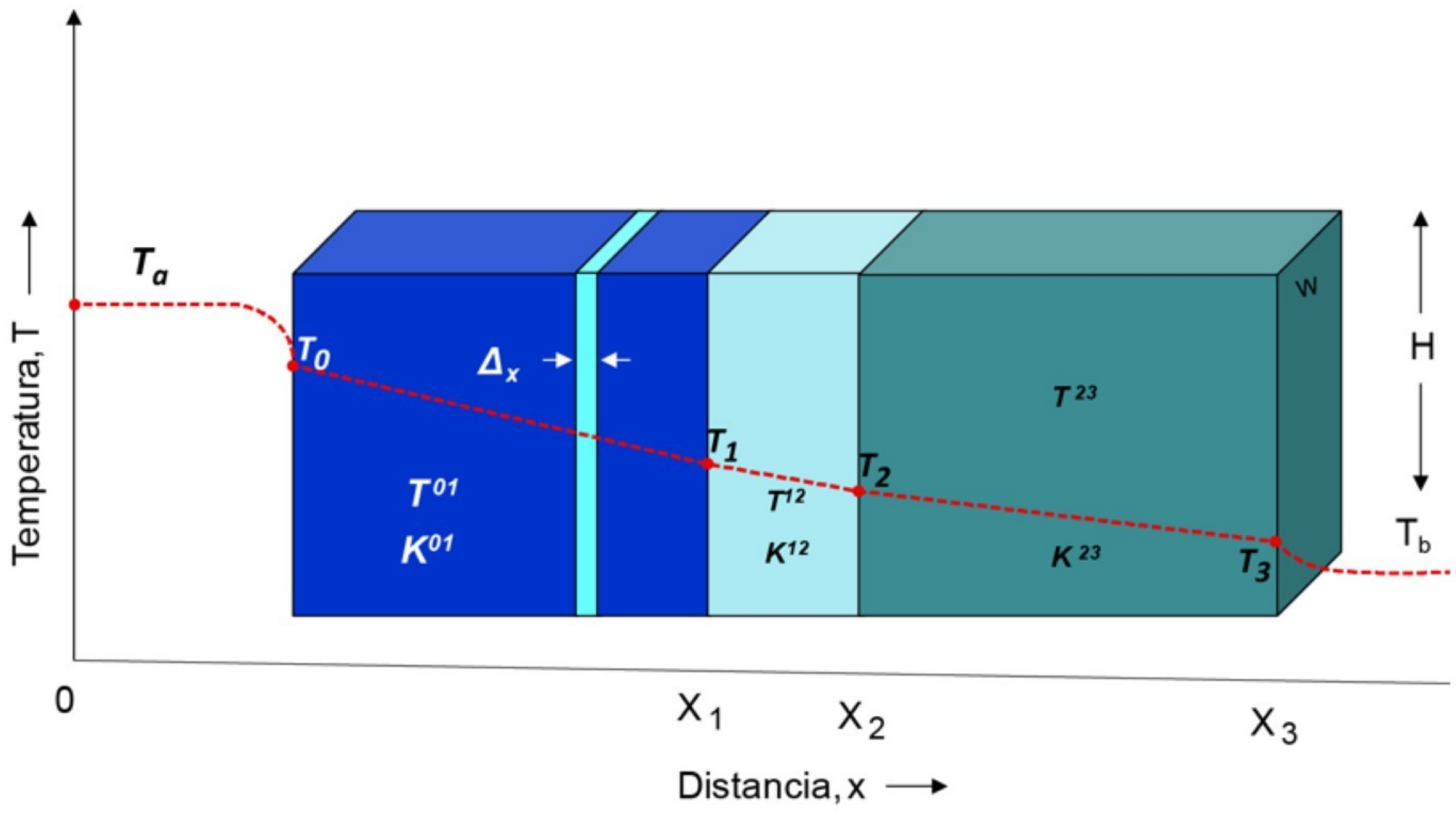
Objetivos

a) Conocer las ecuaciones para el cálculo de transferencia de calor a través de paredes compuestas en coordenadas rectangulares y cilíndricas.

b) Utilizar dichas ecuaciones para resolver problemas en coordenadas rectangulares y cilíndricas.

Paredes Rectangulares

(Diagrama)



Conducción de calor a través de una pared compuesta situada entre dos corrientes de fluidas a temperaturas T_a y T_b

Balance de Energía

Aplicado un balance a la lámina de volumen WHdx, se obtiene, para la conducción del calor en la primera región:

$$q_x^{01}\,\big|_x\, WH - q_x^{01}\big|_{x+\Delta x}\, WH = 0$$

Que lleva a:

$$\frac{dq_x^{01}}{dx} = 0$$

Integrando:

$$q_{01} = q_0$$

Sabemos también que

$$q_x^{01} = -k^{01}\,\frac{dT^{01}}{dx} = q_0$$

Análogamente

$$-k^{01}\,\frac{dT^{01}}{dx}=q_0$$

$$-k^{12}\,\frac{dT^{12}}{dx}=q_0$$

$$-k^{23}\,\frac{dT^{23}}{dx}=q_0$$

Siendo k^{01} , k^{12} y k^{23} constantes

Integrando

$$T_0 - T_1 = -q_0 \left(\frac{x_0 - x_1}{k^{01}}\right)$$

$$T_1 - T_2 = -q_0 \left(\frac{x_1 - x_2}{k^{12}}\right)$$

$$T_2 - T_3 = -q_0 \left(\frac{x_2 - x_3}{k^{23}}\right)$$

En las fronteras

$$T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0}$$

$$T_3 - T_b = \frac{q_0}{h_3}$$

Sumando las ecuaciones

$$T_a - T_b = q_0\left(\frac{1}{h_0} + \frac{x_1 - x_0}{k^{01}} + \frac{x_2 - x_1}{k^{12}} + \frac{x_3 - x_2}{k^{23}} + \frac{1}{h_3}\right)$$

$$q_0 = \frac{T_a - T_b}{\frac{1}{h_0} + \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i - x_{i-1}}{k^{i-1,i}} + \frac{1}{h_3}}$$

Que puede escribirse

$$q_0 = U(T_a - T_b)$$

O

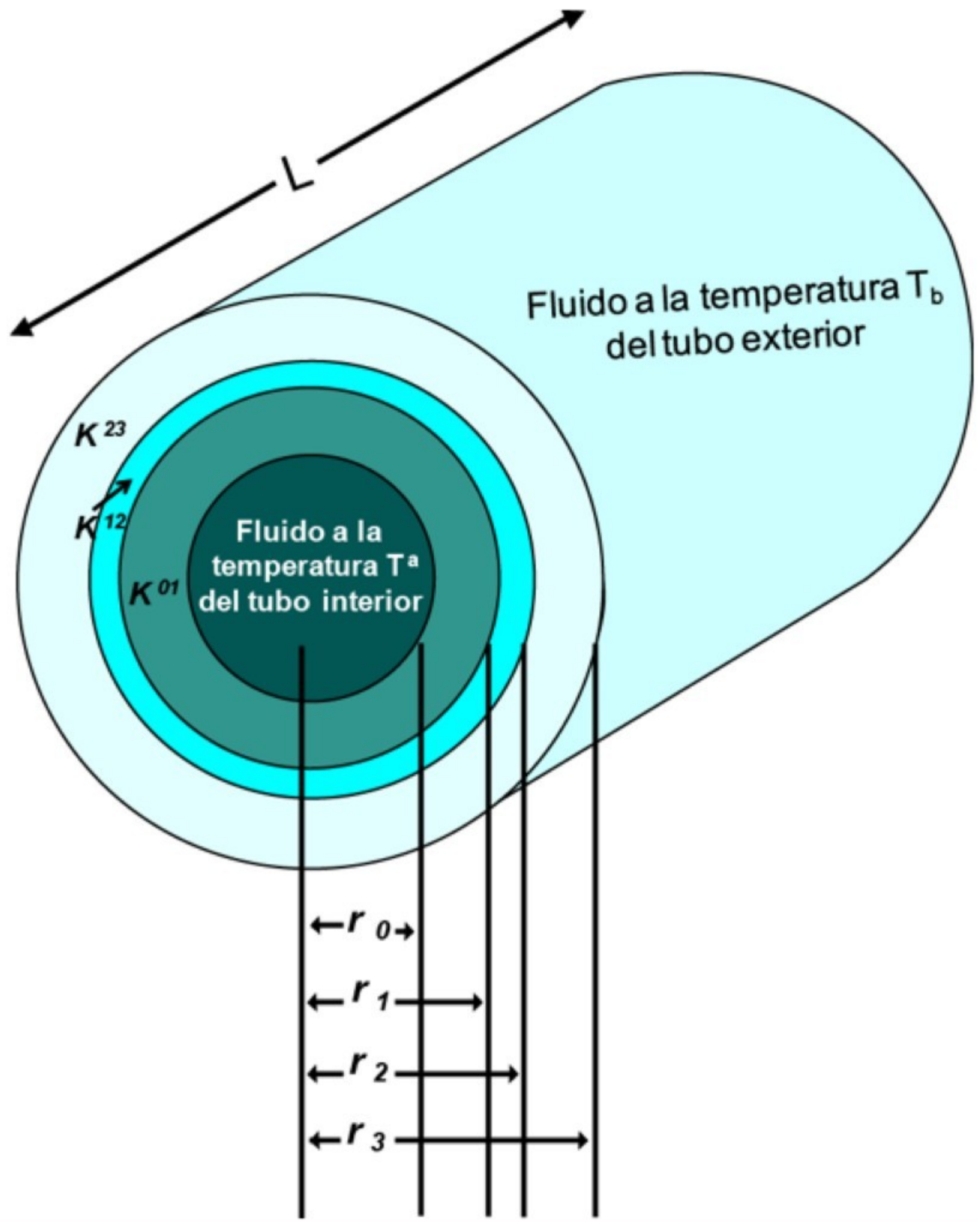
$$Q_0 = U(WH)(T_a - T_b)$$

Donde

$$U = \left(\frac{1}{h_0} + \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i - x_{i-1}}{k^{i-1,i}} + \frac{1}{h_3}\right)^{-1}$$

Paredes Circulares

(Diagrama)



Balance de Energía

Aplicando un balance a la lámina de volumen 2 **πrL** Δr, se obtiene, para la conducción del calor en la primera región:

$$q_r^{01}\big|_r \, 2\,\boldsymbol{\pi}\mathbf{rL} - \mathbf{q_r^{01}}\big|_{r\,+\,\Delta r}\, 2\boldsymbol{\pi}\;(\mathbf{r} + \Delta_\mathbf{r})\mathbf{L} = \mathbf{0}$$

Que lleva a:

$$\frac{d}{d_r}(r q_r^{01}) = 0$$

Integrando:

$$r q_r^{01} = r_0 q_0$$

Sabemos también que

$$-k^{01} r \frac{dT^{01}}{dr} = r_0 q_0$$

Análogamente

$$-k^{12} r \frac{dT^{12}}{dr} = r_0 q_0$$

$$-k^{23} r \frac{dT^{23}}{dr} = r_0 q_0$$

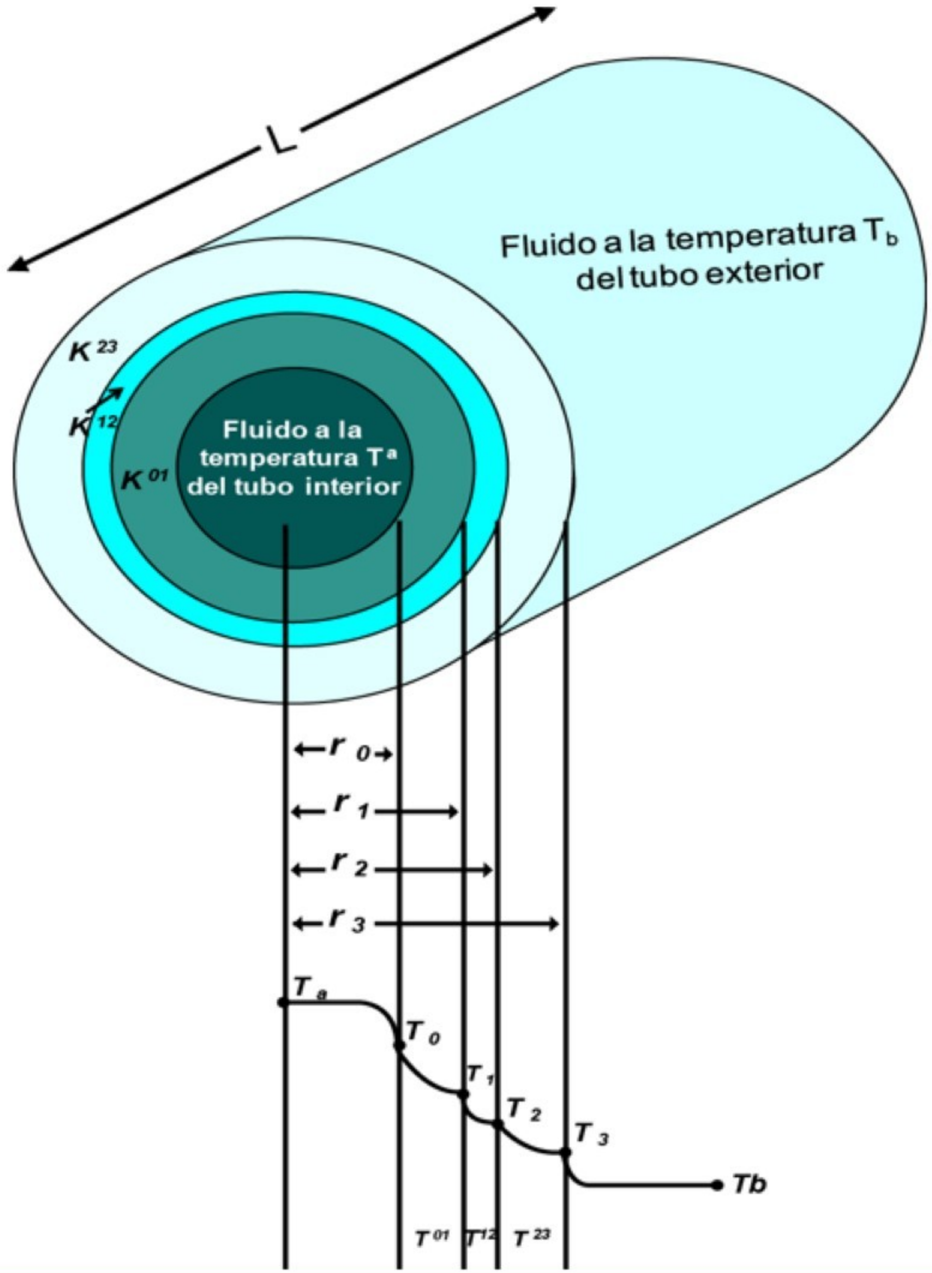
Integrando

$$T_0 - T_1 = r_0 q_0 \left(\frac{In\, r_1/r_0}{k^{01}}\right)$$

$$T_1 - T_2 = r_0 q_0 \left(\frac{In\, r_2/r_1}{k^{12}}\right)$$

$$T_2 - T_3 = r_0 q_0 \left(\frac{In\, r_3/r_2}{k^{23}}\right)$$

Gráficamente



En las fronteras

La convección en la frontera

$$T_a - T_0 = \frac{q_0}{h_0}$$

$$T_3 - T_b = \frac{q_3}{h_3} = \frac{q_0}{h_3}\frac{r_0}{r_3}$$

$$Q_0 = 2\pi L r_0 q_0 = \frac{2\pi L(T_a - T_b)}{\left(\frac{1}{r_0 h_0} + \frac{\ln r_1/r_0}{k^{01}} + \frac{\ln r_2/r_1}{k^{12}} + \frac{\ln r_3/r_2}{k^{23}} + \frac{1}{r_3 h_3}\right)}$$

Sumando

$$Q_0 = U_0(2\pi r_0 L)(T_a - T_b)$$

$$U_0 = r_0^{-1}\left(\frac{1}{r_0 h_0} + \sum_{i=1}^{3} \frac{In\, r_1/r_{i-1}}{k^{i-1,i}} + \frac{1}{r_3 h_3}\right)^{-1}$$

Resumen

Balance Macro	$q_x^{01}\|_x WH - q_x^{01}\|_{x+\Delta x} WH = 0$
	$q_r^{01}\|_r 2\pi r L - q_r^{01}\|_{r+\Delta r} 2\pi\|(r+\Delta r)L = 0$
Balance Diferencial	$\frac{dq_x^{01}}{dx} = 0$ $\frac{d}{dr}(rq_r^{01}) = 0$
Integración	$q_{01} = q_0$
Ecuación	$rq_r^{01} = r_0 q_0$ $q_x^{01} = -k^{01}\frac{dT^{01}}{dx}$ $-k^{01}r\frac{dT^{01}}{dr} = r_0 q_0$
Solución	$T_0 - T_1 = -q_0\left(\frac{x_0 - x_1}{k^{01}}\right)$
	$T_0 - T_1 = r_0 q_0\left(\frac{In\, r_1 / r_0}{k^{01}}\right)$

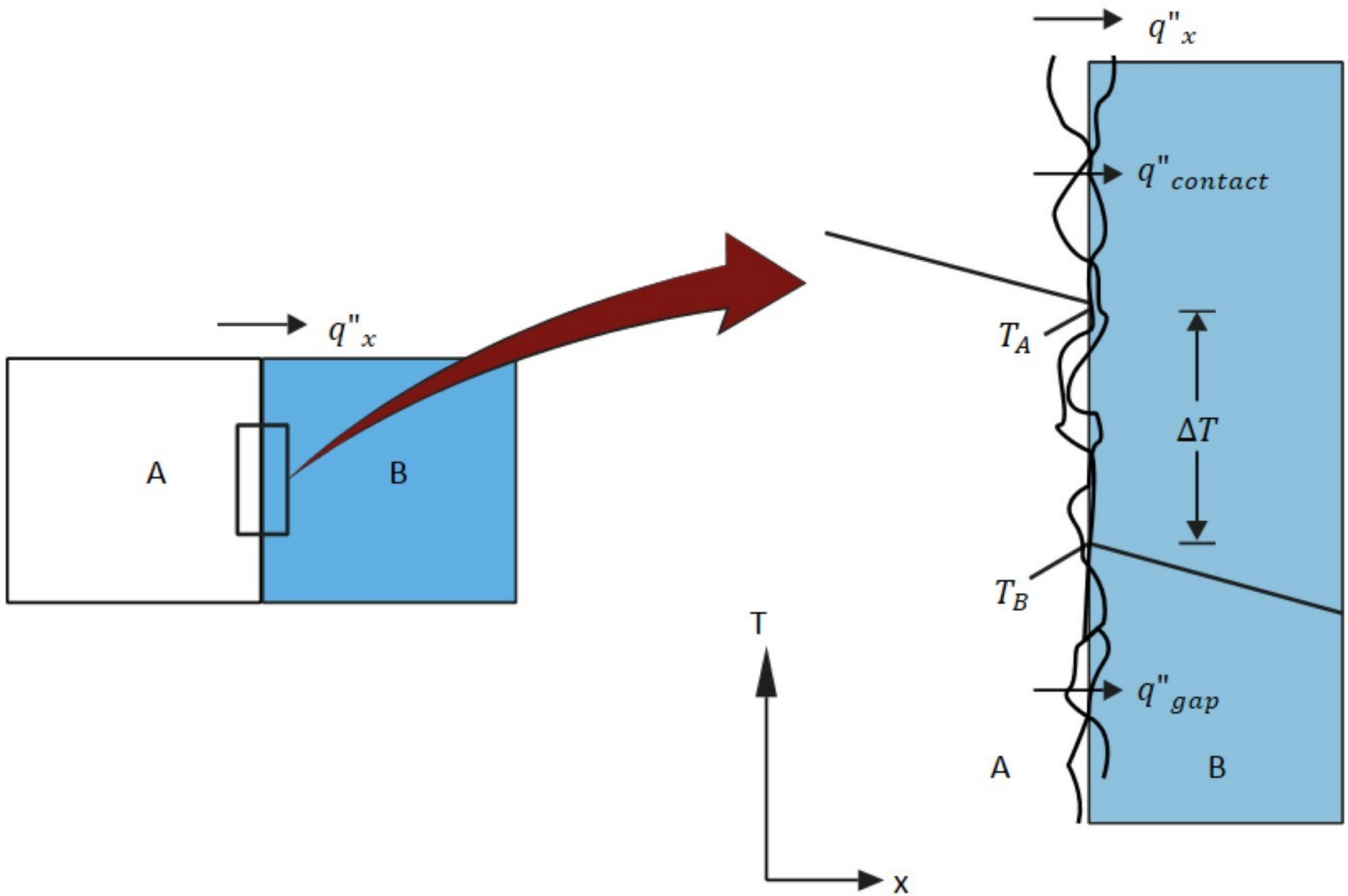
Diferencias y semejanzas.

Semejanzas
En ambos casos se trata de un fenómeno de conducción a traves de capas suc
Se resuelve efectuando un balance de energía sin fuentes

Diferencias:

- En el caso del cilindro, la superficie varia con la distancia. En el caso rectang
- Cada caso lleva a una ecuación diferencial diferente.
- En uno la resistencia térmica es constante.
- En el otro varía con el inverso de la distancia.
- La integral de 1/r es ln(r)

Resistencia de contacto



Datos para "R"

TABLE 3.2 Thermal resistance of representative solid/solid interfaces

Interface	$R''_{t,c} \times 10^4$ ($m^2 \cdot K/W$)	Source
Silicon chip/lapped aluminum in air (27–500 kN/m^2)	0.3–0.6	[2]
Aluminum/aluminum with indium foil filler (~100 kN/m^2)	~0.07	[1, 3]
Stainless/stainless with indium foil filler (~3500 kN/m^2)	~0.04	[1, 3]
Aluminum/aluminum with metallic (Pb) coating	0.01–0.1	[4]
Aluminum/aluminum with Dow Corning 340 grease (~100 kN/m^2)	~0.07	[1, 3]
Stainless/stainless with Dow Corning 340 grease (~3500 kN/m^2)	~0.04	[1, 3]
Silicon chip/aluminum with 0.02-mm epoxy	0.2–0.9	[5]
Brass/brass with 15-μm tin solder	0.025–0.14	[6]

Tipos de Preguntas.

Variables.

- El Flux
- La resistencia (conductividad)
- La temperatura

Toma de decisiones.

- Condiciones de operación
- Mayor economía.

Ejemplo. Pared compuesta circular.

Un tubo de acero de 4 pulgadas de diámetro interior y 4.5 de diámetro exterior, se aísla con una capa de ¾ de pulgada de fibra de vidrio. La superficie interior del tubo está a 400 ^{o}F y la superficie exterior de fibra de vidrio a 90 ^{o}F. Determina cuál es la tasa de transferencia de calor por unidad de longitud del tubo. Utiliza para la conductividad del acero el valor de k=30 BTU/hr-ft-^{o}F y para la fibra de vidrio k=0.032 en las mismas unidades.

Referencia: The Transport Phenomena Problem Solver

Solución

Utilizamos la ecuación:

$$Q_0 = 2\pi L r_0 q_0 = \frac{2\pi L(T_a - T_b)}{\left(\frac{1}{r_0 h_0} + \frac{\ln r_1/r_0}{k^{01}} + \frac{\ln r_2/r_1}{k^{12}} + \frac{\ln r_3/r_2}{k^{23}} + \frac{1}{r_3 h_3}\right)}$$

Con las condiciones del problema.

$$Q/L = \frac{2\pi\,(T_1 - T_3)}{1/K_t \ \ln r_2/r_1 + 1/k_t \ \ln r_3/r_2}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$= \frac{2\pi(400 - 90)}{\frac{1}{30}\ln\frac{2.25}{2} + \frac{1}{0.032}\ln\frac{3.0}{2.25}}$$

$$= \frac{2\pi \times 310}{0.00393 + 8.9901}$$

$$= 216.56 \text{ Btu/hr-ft.}$$

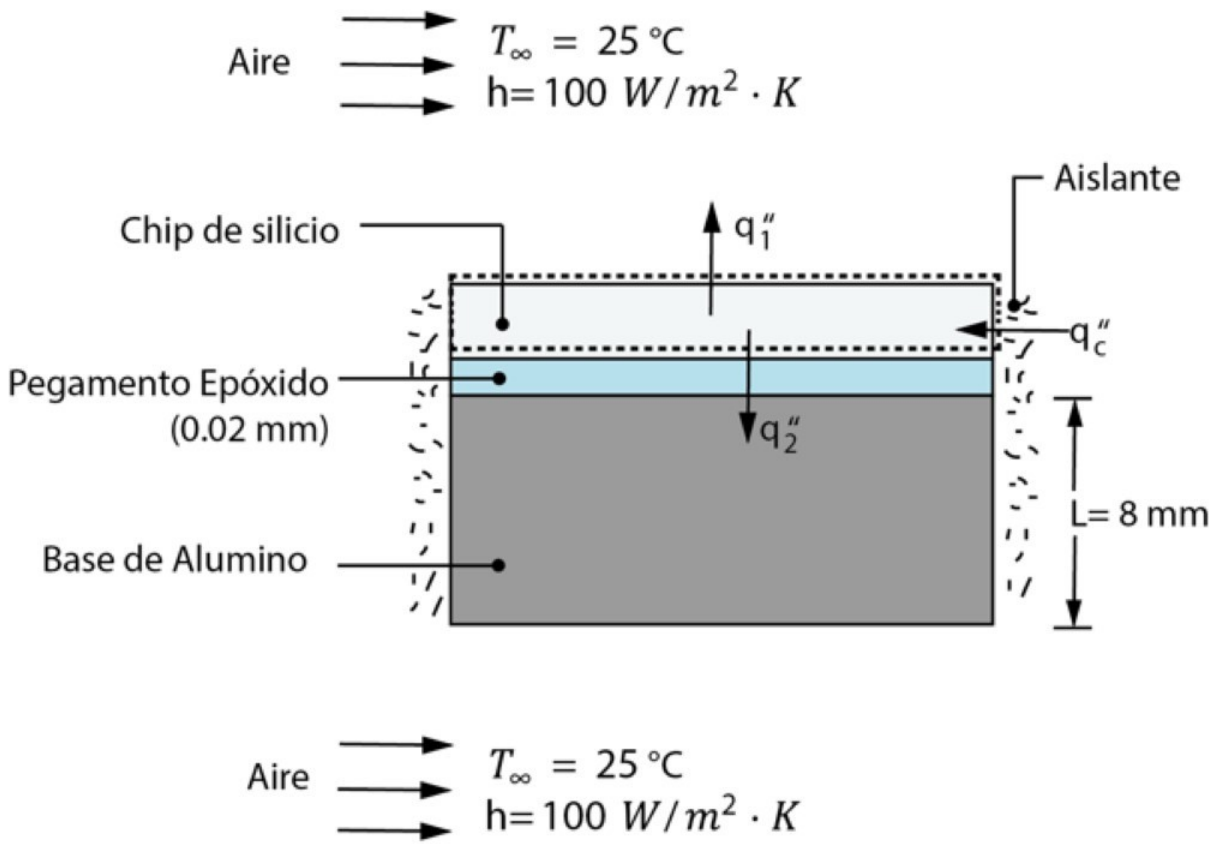
Ejemplo. Límites de operación térmica

Un chip de silicio y su base de aluminio están separados por un pegamento epóxico de espesor 0.02mm. El chip y su base tienen 10 mm de largo y son enfriados por una corriente de aire a 25 ^{o}C Con un coeficiente de convección de 100 $W/m^2\ ^{o}K$

Si el chip disipa energía a una tasa de 10^4 W/m^2 ¿Podrá operar correctamente, si el límite máximo de temperatura que tolera es de 85 ^{o}C?

Nota: La conductividad del Aluminio a 350 K es de 238 W/m K

Diagrama



Aire
$T_\infty = 25\ °C$
$h = 100\ W/m^2 \cdot K$
Aislante
Chip de silicio
q_1''
q_c''
Pegamento Epóxido
(0.02 mm)
q_2''
L= 8 mm
Base de Alumino
Aire
$T_\infty = 25\ °C$
$h = 100\ W/m^2 \cdot K$

Solución

$$q''_c = q''_1 + q''_2$$

$$q''_c = \frac{T_C - T_\infty}{(1/h)} + \frac{T_C - T_\infty}{R''_{t,c} + (L/k) + (1/h)}$$

Solución

$$T_c = T_\infty + q''_c \left[h + \frac{1}{R_{t.c} + (L/k) + (1/h)} \right]^{-1}$$

$$T_c = 25°C + 10^4\, W/m^2$$

$$x \left[100 + \frac{1}{(0.9 + 0.33 + 100) x\ 10^{-4}} \right]^{-1} m^2 \cdot K/W$$

$$T_c = 25°C + 50.3°C = 75.3°C$$

Comentarios a la práctica del curso anterior.

- Fallas en el uso de Excel. Limitaciones del cálculo «a mano»
- Poca comprensión del término perfil de temperatura.
- Poca comprensión del fenómeno de poner diferentes capas de materiales.
- Poca comprensión de la diferencia debida a la geometría.

Perfil de temperatura.

- Es la ecuación que da la relación de la temperatura con la posición.

$$T_0 - T_1 = -q_0 \left(\frac{x_0 - x_1}{k^{01}}\right) \qquad T_1 - T_2 = -q_0 \left(\frac{x_1 - x_2}{k^{12}}\right)$$

$$T_2 - T_3 = -q_0 \left(\frac{x_2 - x_3}{k^{23}}\right)$$

Es diferente en cada capa

pero el flux es siempre el mismo

Para cualquier punto entre x_0 y x_1

$$T = T_0 + \frac{q_0 x_0}{k_{01}} - \frac{q_0}{k_{01}} x$$

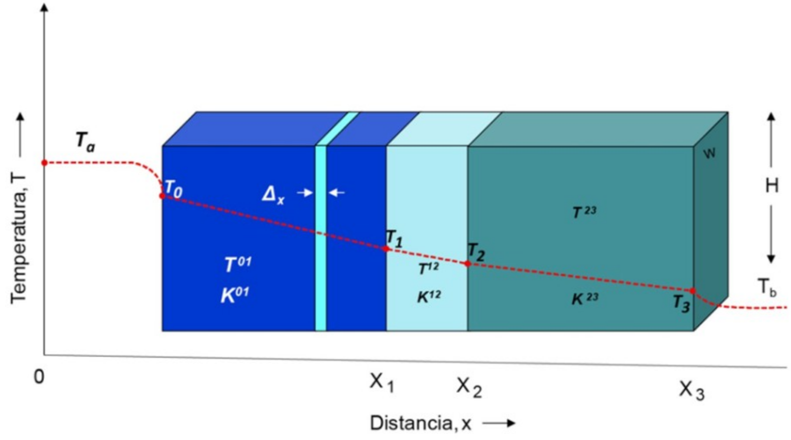
$$T = -\frac{q_0}{k_{01}} x + \frac{k_{01} T_0 + q_0 x_0}{k_{01}}$$

Interpretación

Ecuación de una recta

- Pendiente: $-q_0/k_{01}$
- Ordenada al origen $(K_{01}T_0 + q_0X_0)/K_{01}$
- Para poderlo calcular (graficar es necesario antes conocer q_0

En cada capa es una recta diferente.



Flux

- Es el mismo a través de todos los materiales:

$$-k^{01}\,\frac{dT^{01}}{dx}=q_0$$

$$-k^{12}\,\frac{dT^{12}}{dx}=q_0$$

$$-k^{23}\,\frac{dT^{23}}{dx}=q_0$$

Siendo k^{01} , k^{12} y k^{23} constantes

Se calcula a partir de la suma:

$$q_0=\frac{T_a-T_b}{\frac{1}{h_0}+\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i-x_{i-1}}{k^{i-1,i}}+\frac{1}{h_3}}$$

En coordenadas cilíndricas

$$T_0 - T_1 = r_0 q_0 \left(\frac{In\, r_1/r_0}{k^{01}} \right)$$

- Lleva a:

$$T = T_0 - r_0 q_0 \left(\frac{In\, r\ /r_0}{k^{01}} \right)$$

Pasos para el cálculo del perfil de Temperaturas

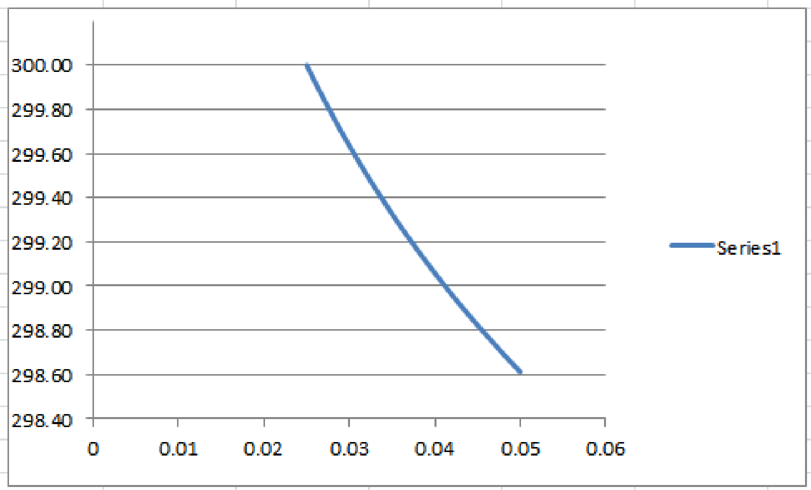
- Despejar T en función de x (o de r)
- Calcular q_0 o r_0q_0
- Realizar los cálculos.

- Ejemplo resuelto:

Graficando

B2 f_x =C$2-D$2*E$2*LN(A2/D$2)/F$2

	A	B	C	D	E	F
1	r	T	T_o	r_o	q_o	K_{01}
2	0.025	300.00	300	0.025	24	0.3
3	0.026	299.92				
4	0.027	299.85				
5	0.028	299.77				
6	0.029	299.70				
7	0.03	299.64				
8	0.031	299.57				
9	0.032	299.51				
10	0.033	299.44				
11	0.034	299.39				
12	0.035	299.33				
13	0.036	299.27				
14	0.037	299.22				
15	0.038	299.16				
16	0.039	299.11				
17	0.04	299.06				
18	0.041	299.01				
19	0.042	298.96				
20	0.043	298.92				
21	0.044	298.87				
22	0.045	298.82				
23	0.046	298.78				



Cuestionario

- ¿Qué es el perfil de temperaturas?
- ¿Cuál es la ecuación que describe el flux de calor a través de una sucesión de paredes de geometría rectangular?
- ¿Qué significa cada uno de los términos de esa ecuación?
- ¿Qué condiciones a la frontera se han supuesto?
- ¿Cómo es el perfil de temperaturas a través de una placa rectangular (geometría cartesiana)?

- ¿Cuál es la ecuación que describe el flux de calor a través de una sucesión de paredes de geometría cilíndrica?
- ¿Qué significa cada uno de los términos de esa ecuación?
- ¿Cómo es el perfil de temperaturas a través de una placa de geometría cilíndrica?
- ¿Por qué es necesario considerar resistencia térmica en el cóntacto entre dos superficies sólidas?
- ¿Cómo se incluye esa resistencia térmica en las ecuaciones de transferencia a través de paredes compuestas?