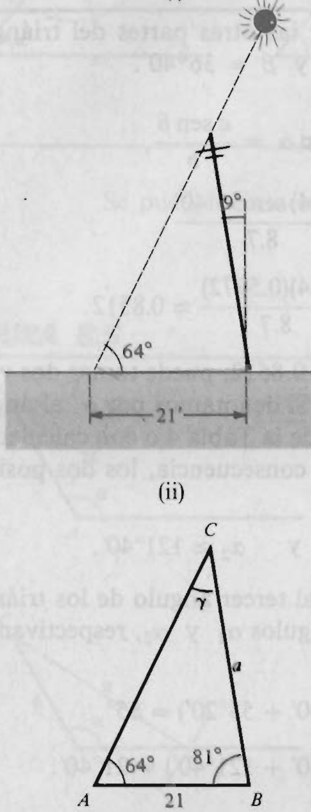
Como consecuencia, las partes restantes del triángulo A_2BC son $\alpha_2 \approx 121°40'$, $\gamma_2 \approx 21°40'$ y $c_2 \approx 5.4$. ∎

FIGURA 8.7

(i)

(ii)



EJEMPLO 4 Cuando el ángulo de elevación del Sol es de 64°, un poste telefónico que está inclinado un ángulo de 9° en la dirección a la que se encuentra el Sol, hace una sombra de 21 pie de longitud sobre el piso. Determine la longitud del poste.

SOLUCIÓN En los problemas de aplicación es importante hacer un diagrama y marcarlo apropiadamente, como se ilustra en la Figura 8.7(i) (que no está dibujada a escala). En la parte (ii) de la figura, se considera también el triángulo ABC que muestra los datos que se tienen. Cualquiera de estos dos croquis es suficiente para nuestros propósitos. Nótese que en la Figura 8.7(ii) se han calculado $\beta = 90° - 9° = 81°$. Por lo que

$$\gamma = 180° - (64° + 81°) = 180° - 145° = 35°.$$

La longitud del poste es el lado a del triángulo ABC. Aplicando la Ley de los Senos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 64°} = \frac{21}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

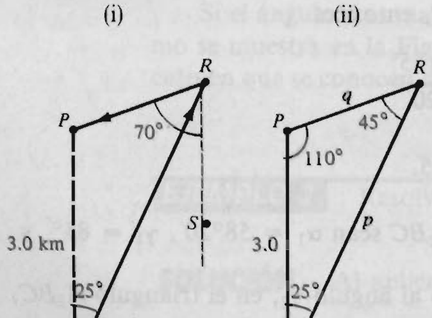
Puesto que $\gamma = 35°$, esto da

$$a = \frac{(21)\operatorname{sen} 64°}{\operatorname{sen} 35°} = \frac{(21)(0.8988)}{0.5736} \approx 33.$$

Por lo tanto, el poste telefónico mide aproximadamente 33 pie de longitud. ∎

FIGURA 8.8

(i) (ii)



EJEMPLO 5 Un punto P, al nivel del piso, se encuentra 3 km al norte de un punto Q. Un corredor se dirige en la dirección N25°E de Q hacia un punto R y de ahí a P en la dirección S70°W. Aproxime la distancia recorrida.

SOLUCIÓN La notación que se usa para especificar las direcciones se presentó en la Sección 6.4. En la Figura 8.8(i) se muestra la trayectoria del corredor conjuntamente con la línea norte-sur (con trazo punteado) desde R hasta otro punto S.

Puesto que las rectas que pasan por PQ y por RS son paralelas, con base en la geometría sabemos que los ángulos alternos internos $\angle PQR$ y $\angle QRS$ miden ambos 25°. Por lo tanto,

$$\angle PRQ = 70° - 25° = 45°.$$

A partir de estas observaciones se obtiene el triángulo PQR de la Figura 8.8(ii), en el que

$$\angle QPR = 180^\circ - (25^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Aplicando dos veces la Ley de los Senos se obtiene

$$\frac{q}{\operatorname{sen} 25^\circ} = \frac{3.0}{\operatorname{sen} 45^\circ} \quad \text{y} \quad \frac{p}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \frac{3.0}{\operatorname{sen} 45^\circ}.$$

Por tanto,

$$q = \frac{(3.0)\operatorname{sen} 25^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} \approx \frac{(3.0)(0.4226)}{0.7071} \approx 1.8$$

y

$$p = \frac{(3.0)\operatorname{sen} 110^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} \approx \frac{(3.0)(0.9397)}{0.7071} \approx 4.0$$

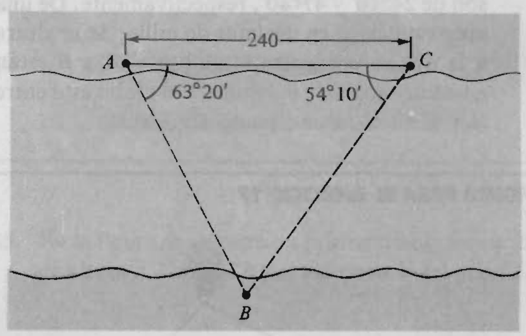
La distancia recorrida, al kilómetro más cercano, es $p + q = 5.8$ km. ■

Ejercicios 8.1

En cada uno de los Ejercicios 1 a 12 calcule las otras partes del triángulo ABC.

1. $\alpha = 41^\circ$, $\gamma = 77^\circ$, $a = 10.5$
2. $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 31^\circ$, $b = 210$
3. $\alpha = 27^\circ 40'$, $\beta = 52^\circ 10'$, $a = 32.4$
4. $\alpha = 42^\circ 10'$, $\gamma = 61^\circ 20'$, $b = 19.7$
5. $\beta = 50^\circ 50'$, $\gamma = 70^\circ 30'$, $c = 537$
6. $\alpha = 7^\circ 10'$, $\beta = 11^\circ 40'$, $a = 2.19$
7. $\alpha = 65^\circ 10'$, $a = 21.3$, $b = 18.9$
8. $\beta = 30^\circ$, $b = 17.9$, $a = 35.8$
9. $\gamma = 53^\circ 20'$, $a = 140$, $c = 115$
10. $\alpha = 27^\circ 30'$, $c = 52.8$, $a = 28.1$
11. $\beta = 113^\circ 10'$, $b = 248$, $c = 195$
12. $\gamma = 81^\circ$, $c = 11$, $b = 12$
13. Se desea determinar la distancia entre dos puntos A y B que se encuentran en las orillas opuestas de un río. Se traza un segmento de recta AC de una longitud de 240 yardas y se encuentra que los ángulos BAC y ACB miden $63^\circ 20'$ y $54^\circ 10'$, respectivamente (véase figura). Aproxime la distancia de A a B.

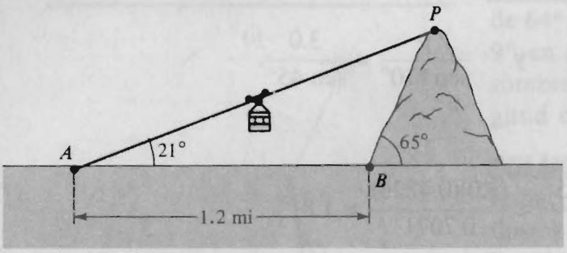
FIGURA PARA EL EJERCICIO 13



14. Para encontrar la distancia entre dos puntos A y B un topógrafo elige un punto C que está a 375 yardas de A y a 530 yardas de B. Si $\angle BAC$ mide $49^\circ 30'$, aproxime la distancia entre A y B.
15. Un funicular lleva pasajeros del punto A, que se encuentra a 1.2 millas del pie de una montaña al Pico del Mirador, en el punto P. Como se muestra en la figura, el ángulo de elevación de P desde A es de 21°, mientras que el ángulo de elevación desde B, al pie de la montaña, es de 65°.
    (a) ¿Qué distancia recorre el funicular entre A y P?

(b) ¿Cuál es la diferencia de elevación entre los puntos A y P?

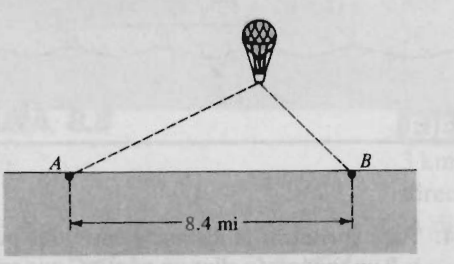
FIGURA PARA EL EJERCICIO 15



16. Una carretera recta forma un ángulo de 15° con el plano horizontal. Un poste vertical, que se encuentra en la orilla de la carretera, produce una sombra sobre ésta de 75 pie de longitud, cuando el ángulo de elevación del Sol es de 57°. Aproxime la longitud del poste.

17. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a los puntos A y B, sobre el nivel de tierra son de 24°10′ y 47°40′, respectivamente. Dé una aproximación, en décimas de milla, de la altura a la que se encuentra el globo, si A y B están a una distancia de 8.4 millas y el globo está entre A y B en el mismo plano vertical.

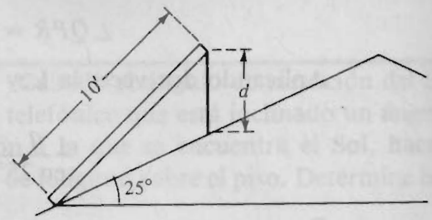
FIGURA PARA EL EJERCICIO 17



18. En la figura se indica un panel solar de 10 pie de ancho que se colocará sobre un techo que forma un ángulo de 25° con la horizontal. Aproxime la longitud d del sostén que se requiere si el panel debe formar un ángulo de 45° con la horizontal.

19. Un guardia forestal divisa, desde un punto de observación A, un incendio en la dirección

FIGURA PARA EL EJERCICIO 18

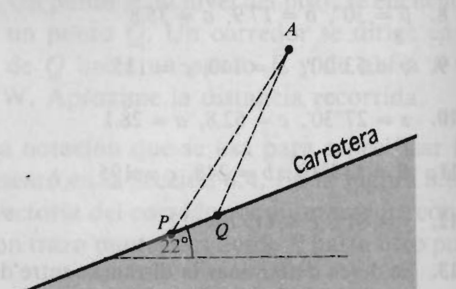


N27°10′E. Otro guardia, que se encuentra en el punto de observación B, a 6 millas al este de A, ve el mismo fuego en la dirección N52°40′W. Calcule, al décimo de milla más cercano, la distancia de cada uno de los puntos de observación al incendio.

20. Un topógrafo se da cuenta de que la dirección de un punto A a un punto B es S63°W y que la dirección de A a C es S38°W. La distancia de A a B es de 239 yardas y la distancia de B a C es de 374 yardas. Determine la distancia de A a C.

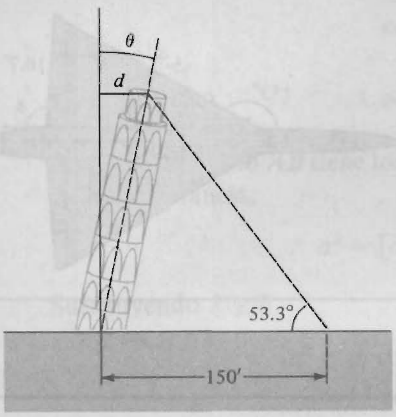
21. Una carretera recta forma un ángulo de 22° con el plano horizontal. Desde un cierto punto P sobre el camino, el ángulo de elevación de un avión que se halla en el punto A es de 57°. En ese mismo momento, desde otro punto Q, a 100 m más arriba de P sobre la carretera, el ángulo de elevación es de 63°. Como se indica en la figura, los puntos P, Q y A están en un mismo plano vertical. Calcule, al metro más cercano, la distancia de P al avión.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 21



22. La torre inclinada de Pisa tenía originalmente una altura de 179 pie, pero ahora, debido a que se

FIGURA PARA EL EJERCICIO 22



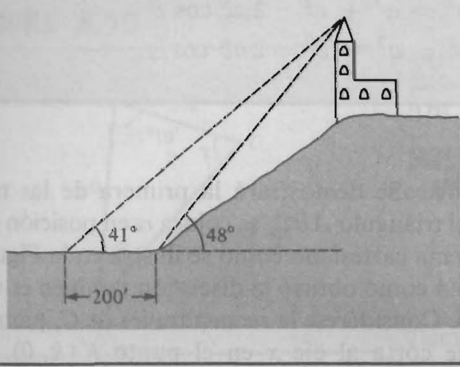
ha hundido en el terreno, está inclinada un ángulo θ con respecto a la perpendicular (véase la figura). Cuando la parte superior de la torre se ve desde un punto a 150 pie de su base, el ángulo de elevación es de 53.3°.

(a) Determine el ángulo θ.

(b) Aproxime la distancia d que se ha movido el extremo de la torre respecto de la posición perpendicular al terreno.

23. Una catedral está situada en la cima de una colina. Cuando la punta de su torre se observa desde el pie de la loma, el ángulo de elevación es de 48°. Cuando se ve desde un punto a una distancia de 200 pie del pie del promontorio, el ángulo de elevación es de 41°. La cuesta de la colina forma un ángulo de 32°. Aproxime la altura de la catedral.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 23

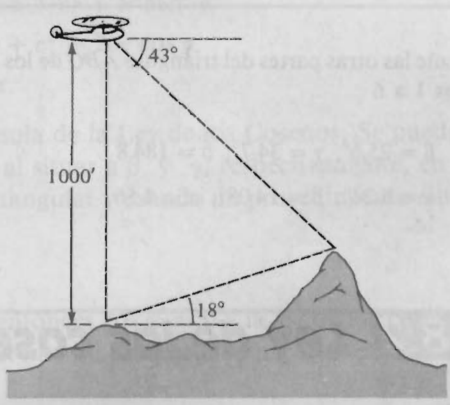


24. Un helicóptero se halla suspendido a una altura de 1000 pie sobre la cumbre de una montaña que tiene 5 210 pie de altitud. Desde esa cima y desde el aparato puede verse la cúspide de otra montaña más alta. Desde el helicóptero, el ángulo de depresión es de 43°. Desde la cima de la primera montaña, el ángulo de elevación es de 18°. Calcule lo siguiente, al pie más cercano.

(a) La distancia de un pico al otro.

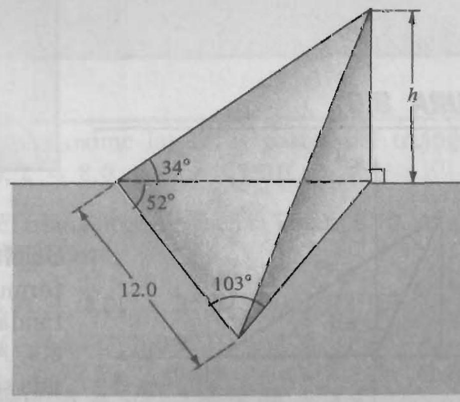
(b) La altitud de la cumbre de la montaña más alta.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 24



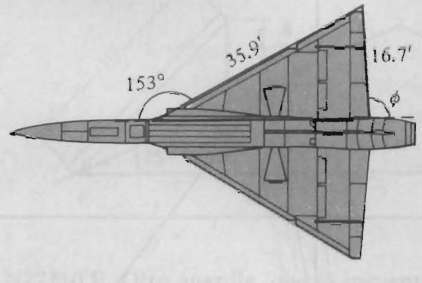
25. En la figura se muestra un prisma triangular recto de altura h. Calcule h y el volumen V del prisma.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 25



26. En la figura se muestra la vista desde arriba de un avión *jet* Delta Dart, que se distingue por el diseño poco común de sus alas. En el croquis se indican los datos relativos a éstas.
(a) Calcule el ángulo ϕ.
(b) Si el fuselaje tiene 4.80 pie de ancho, calcule la envergadura o extensión de las alas del avión.
(c) Calcule el área de una ala.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 26



Ejercicios para calculadora 8.1

Calcule las otras partes del triángulo ABC de los Ejercicios 1 a 6

1. $\beta = 25.6°$, $\gamma = 34.7°$, $b = 184.8$
2. $\alpha = 6.24°$, $\beta = 14.08°$, $a = 4.56$
3. $\alpha = 103.45°$, $\gamma = 27.19°$, $b = 38.84$
4. $\gamma = 47.74°$, $a = 131.08$, $c = 97.84$
5. $\beta = 121.624°$, $b = 0.283$, $c = 0.178$
6. $\alpha = 32.32°$, $c = 574.3$, $a = 263.6$

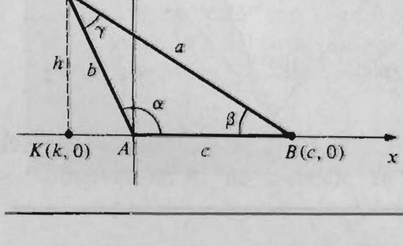
8.2 Ley de los cosenos

La ley de los senos no se puede aplicar directamente si se conocen dos lados de un triángulo y el ángulo entre ellos o si se conocen los tres lados del triángulo. Sin embargo, podemos hacer uso del siguiente resultado.

LEY DE LOS COSENOS Si ABC es un triángulo designado de la manera usual, entonces

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

FIGURA 8.9



DEMOSTRACIÓN Se demostrará la primera de las tres fórmulas. Dado el triángulo ABC, se coloca α en posición estándar en un sistema cartesiano como se ilustra en la Figura 8.9. Aunque α está como obtuso la discusión también es válida si α es agudo. Considérese la recta a través de C, paralela al eje y y que corta al eje x en el punto $K(k, 0)$. Si

Esto se puede escribir en la forma

$$\tfrac{1}{2}bc(1+\cos\alpha)=\frac{(b+c)+a}{2}\cdot\frac{(b+c)-a}{2}.$$

Haciendo el mismo tipo de manipulación

$$\tfrac{1}{2}bc(1-\cos\alpha)=\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}.$$

Si ahora se sustituyen las expresiones bajo el radical, se obtiene

$$\mathscr{A}=\sqrt{\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}$$

Haciendo $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, se ve que

$$s-a=\frac{b+c-a}{2},\qquad s-b=\frac{a-b+c}{2},\qquad s-c=\frac{a+b-c}{2}.$$

Sustituyendo en la última fórmula para $\mathscr{A}$ se obtiene la fórmula de Herón. □

EJEMPLO 6 Un granjero tiene un campo triangular cuyos lados tienen una longitud de 125 yardas, 160 yardas y 225 yardas. Calcule el número de acres del campo. (Un acre es equivalente a 4 840 yardas cuadradas.)

SOLUCIÓN Primero se encuentra el área del campo usando la fórmula de Herón con $a = 125$, $b = 160$ y $c = 225$. Así,

$$s=\tfrac{1}{2}(125+160+225)=\tfrac{1}{2}(510)=255$$

$$s-a=255-125=130$$

$$s-b=255-160=95$$

$$s-c=255-225=30$$

y

$$\mathscr{A}=\sqrt{(255)(130)(95)(30)}\approx 9720\ \text{yd}^2.$$

Puesto que hay 4 840 yardas cuadradas en un acre, el número de acres es 9 720/4 840, o aproximadamente 2. ■

Ejercicios 8.2

En los Ejercicios 1 a 10, calcule las otras partes del triángulo ABC.

1. $\alpha = 60°$, $b = 20$, $c = 30$
2. $\gamma = 45°$, $b = 10.0$, $a = 15.0$
3. $\beta = 150°$, $a = 150$, $c = 30.0$
4. $\beta = 73°50'$, $c = 14.0$, $a = 87.0$
5. $\gamma = 115°10'$, $a = 1.10$, $b = 2.10$
6. $\alpha = 23°40'$, $c = 4.30$, $b = 70.0$
7. $a = 2.0$, $b = 3.0$, $c = 4.0$
8. $a = 10$, $b = 15$, $c = 12$
9. $a = 25.0$, $b = 80.0$, $c = 60.0$
10. $a = 20.0$, $b = 20.0$, $c = 10.0$

11. El ángulo de una de las esquinas de un terreno en forma triangular mide 73°40′. Si los lados, entre los cuales se encuentra dicho ángulo, tienen una longitud de 175 y 150 pie, determine la longitud del tercero de los lados.

12. Un topógrafo elige un punto C a 420 yardas de A y a 540 yardas de B, con el objeto de determinar la distancia entre los puntos A y B. Dé una aproximación de la distancia AB, si el ángulo ACB mide 63°10′.

13. Dos automóviles parten del mismo punto y viajan sobre dos carreteras que se desvían en 84°. ¿Cuál será la distancia comprendida entre las dos, después de 20 minutos, si sus velocidades son 60 y 45 millas por hora, respectivamente?

14. Los lados de un terreno triangular miden 420, 350 y 180 pie de longitud. Determine el valor del ángulo más pequeño del terreno.

15. Un barco parte del punto P a la 1:00 P.M. y viaja a una velocidad de 24 millas por hora en dirección S35°E. Otro barco parte del mismo punto a la 1:30 P.M. y viaja a 18 millas por hora en dirección S20°O. ¿Cuál será la distancia aproximada entre ambos barcos a las 3:00 P.M.?

16. Un aeroplano parte del punto A a 165 millas en la dirección 130° y luego viaja a 80 millas en la dirección 245°. Aproxime la distancia del aeroplano al punto A.

17. Un atleta corre, a una velocidad constante de una milla cada ocho minutos, durante 20 minutos en la dirección S40°E y luego, en la dirección N20°E los siguientes 16 minutos. Aproxime, al décimo de milla más cercano, la distancia del corredor al punto de partida.

18. Dos puntos P y Q, sobre el suelo horizontal, se localizan en los lados opuestos de un edificio. Con el objeto de determinar la distancia d entre los puntos, un topógrafo elige un punto R a 300 y 438 pie de P y Q, respectivamente. Aproxime d si el ángulo PRQ mide 37°40′.

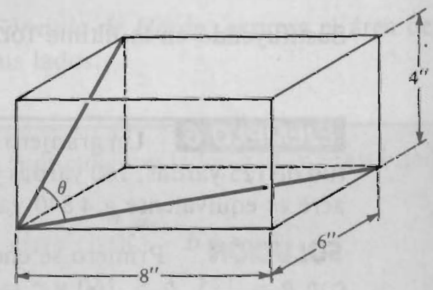
19. Una lancha sigue una ruta triangular, cuyos lados miden 2 km, 4 km y 3 km. Aproxime, al minuto más cercano, la dirección que lleva la lancha en el tercero de los lados, si en el primero de ellos sigue una dirección de N20°O y en el segundo una dirección SD°W, donde D° es el valor en grados de un ángulo agudo.

20. Un rombo tiene lados de longitud de 100 cm y el ángulo en uno de sus vértices es de 70°. Aproxime las longitudes de las diagonales al décimo de centímetro más cercano.

21. En el beisbol de las ligas mayores, las cuatro bases (que forman un cuadrado) están a 90 pie y el montículo del *pitcher* está a 60.5 pie del cojín de *home*. Calcule la distancia del montículo del lanzador a cada una de las otras tres bases.

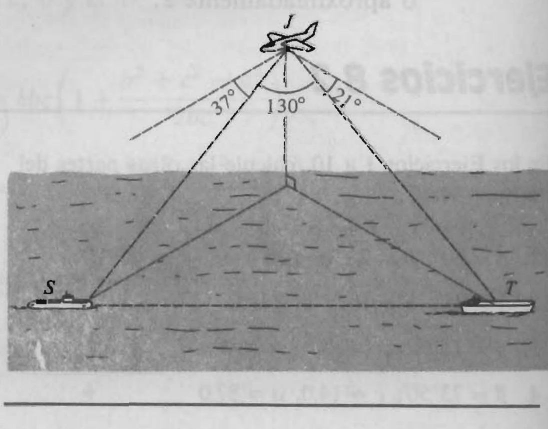
22. Las dimensiones de la caja rectangular que se muestra en la figura son 8 × 6 × 4 pulgadas. Encuentre el ángulo formado por la diagonal de la base y la diagonal del lado de 6 × 4 pulgadas.

FIGURA PARA EL EJERCICIO 22



23. Un avión *jet* de reconocimiento, J, que vuela a una altura de 10 000 pie, localiza a un submarino S a un ángulo de depresión de 37° y un buquetanque T a un ángulo de depresión de 21° (véase la figura). Además, encuentra que ∠ SJT es de

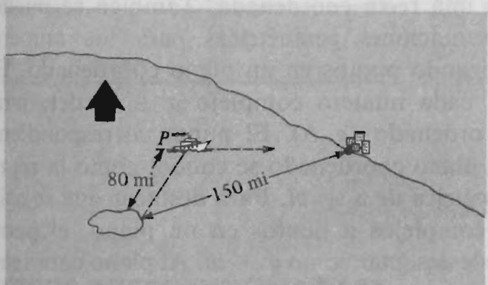
FIGURA PARA EL EJERCICIO 23



130°. Calcule la distancia entre el submarino y el buque-tanque.

24. Un crucero viaja en la dirección N47°E desde una isla hacia un puerto en tierra firme que está a 150 millas de distancia. Después de navegar a través de corrientes muy fuertes hacia el oeste, el capitán encuentra que se ha salido de la ruta y está en la posición P, N33°E a 80 millas de la isla.
(a) Calcule la distancia del barco del puerto.
(b) ¿En qué dirección debe enfilar el navío para corregir su rumbo?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 24



25. En la figura se muestra la vista desde arriba de un avión *jet* de combate con el diseño de sus alas.
(a) Calcule el ángulo ϕ y el área de una ala.
(b) Si el ancho del fuselaje es de 5.8 pie, determine la envergadura del avión (extensión de un extremo a otro de las alas).

FIGURA PARA EL EJERCICIO 25

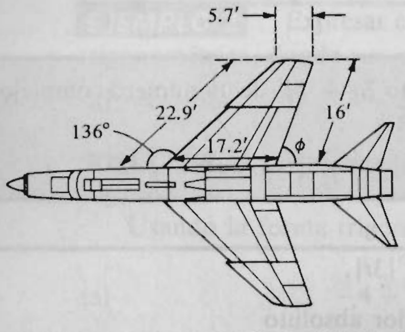
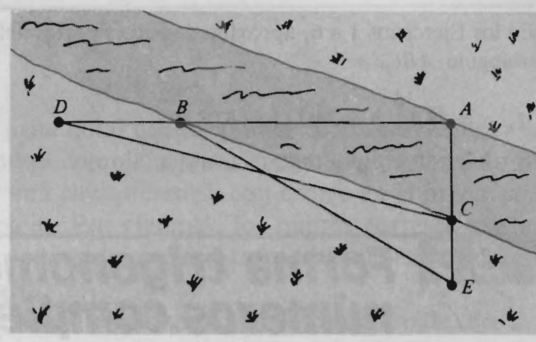


FIGURA PARA EL EJERCICIO 26



26. Para evaluar la distancia a través de un río sin medir ángulos se puede usar el siguiente método de topografía. Se eligen dos puntos B y C en la orilla opuesta y se prolongan los segmentos de recta AB y AC, como se muestra en la figura. Los puntos D y E se escogen como se indica y se miden las distancias BC, BD, BE, CD y CE. Supóngase que BC = 184 pie, BD = 102 pie, BE = 218 pie, CE = 118 pie y CD = 236 pie.
(a) Calcule las distancias AB y AC.
(b) Calcule la distancia más corta a través del río desde el punto A.

En los Ejercicios 27 a 34 aproxime el área del triángulo ABC.

27. $\alpha = 60°$, $b = 20$, $c = 30$

28. $\gamma = 45°$, $b = 10.0$, $a = 15.0$

29 $\beta = 150°$, $a = 150$, $c = 30.0$

30. $\beta = 73°50'$, $c = 14.0$, $a = 87.0$

31. $a = 2.0$, $b = 3.0$, $c = 4.0$

32. $a = 10$, $b = 15$, $c = 12$

33. $a = 25.0$, $b = 80.0$, $c = 60.0$

34. $a = 20.0$, $b = 20.0$, $c = 10.0$

35. Un terreno triangular tiene lados de longitud igual a 115 yardas, 140 yardas y 200 yardas. Calcule el número de acres del terreno. (Un acre es equivalente a 4 840 yardas cuadradas.)

36. Obtenga el área de un paralelogramo que tiene lados de longitud 12.0 y 16.0 pie, si un ángulo en un vértice mide 40°.