

Integración numérica

Todo proceso que puede verse como una suma infinita de productos puede ser representado con integrales

Las integrales se emplean en muchos contextos de la ingeniería.

En las matemáticas al resolver ecuaciones diferenciales se hace muy importante el uso de la integración numérica.

En la práctica las integrales más importantes son las definidas $\int_a^b f(x) dx$ pues son las que tienen aplicación.

Como bien sabemos no todas las integrales se pueden hacer analíticamente pues no siempre habrá antiderivada, es aquí donde las técnicas numéricas tienen su poder.

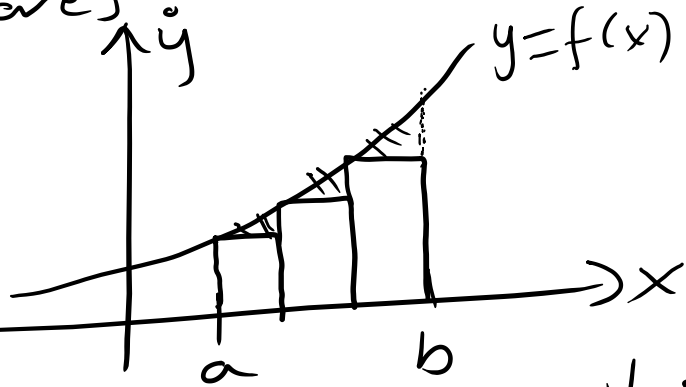
Existen varias metodologías numéricas para hacer integrales

Sumas de Riemann

Se aproxima el área bajo la curva mediante sumas de áreas de rectángulos podemos tener tres tipos:

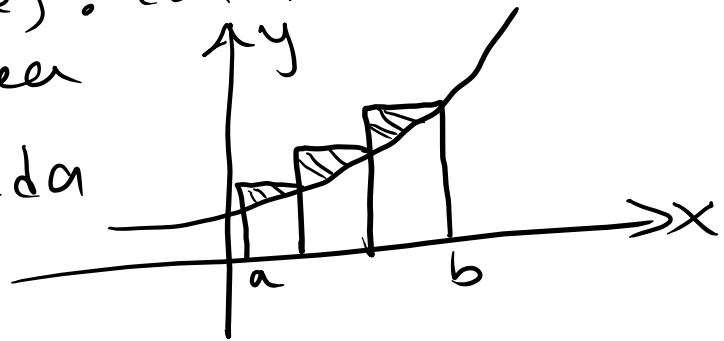
a) Sumas interiores: con rectángulos inscritos

En este caso el área aproximada es menor a la real

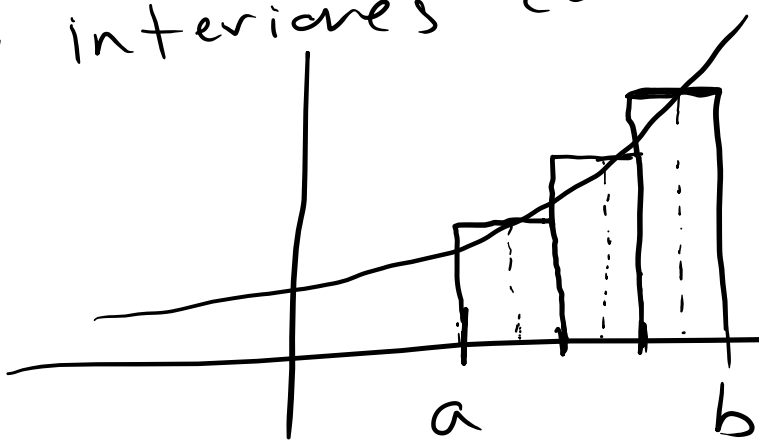


b) Sumas exteriores: con rectángulos por afuera del área

El área aproximada es mayor que el área real



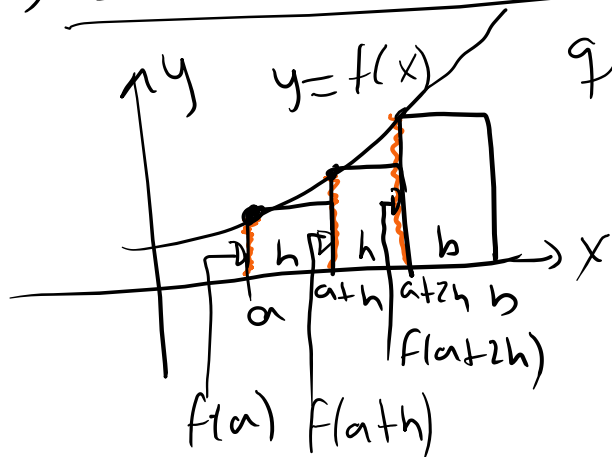
*c) Sumas centrales: con rectángulos tanto interiores como exteriores



En este caso la aproximación es muy buena pues las áreas en exceso y déficit se cancelan

Se usan menos rectángulos

a) Sumas interiores



queremos calcular $\int_a^b f(x)$

El área de cada rectángulo es (base)(Altura)

$$\begin{aligned} A_{\text{Total}} &\approx hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) \\ &= h(f(a) + f(a+h) + f(a+2h)) \\ &= h \sum_{i=1}^3 f(a + \underbrace{(i-1)h} \end{aligned}$$

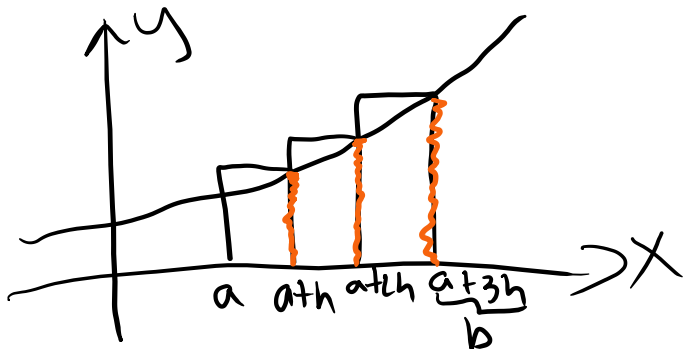
La fórmula general es

$$A_{\text{Total}} = h \sum_{i=1}^n f(a + (i-1)h)$$

n es el número de rectángulos

$$h = \frac{b-a}{n}$$

b) Sumas exteriores



$$A \approx hf(a+h) + hf(a+2h) + hf(a+3h)$$

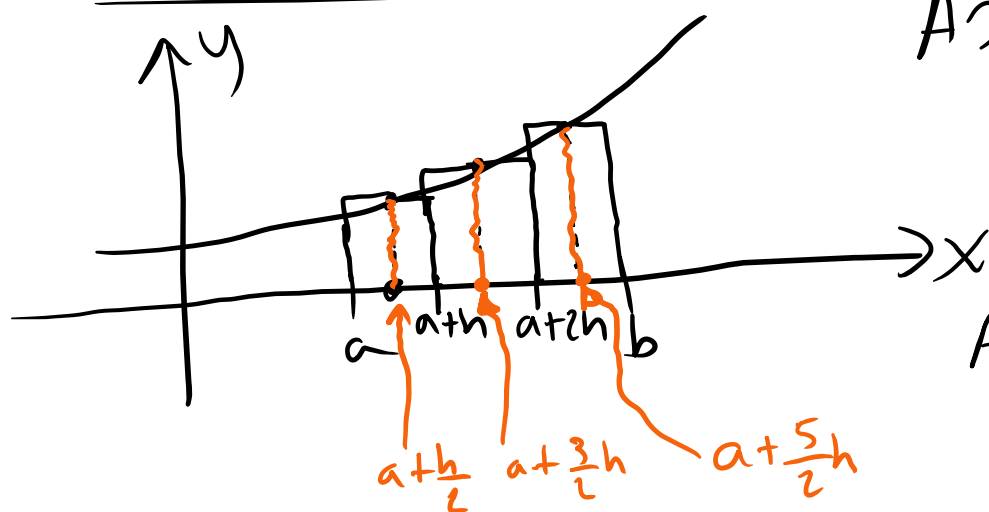
$$A \approx h(f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h))$$

$$A \approx h \sum_{i=1}^3 f(a+ih)$$

En general

$$A \approx h \sum_{i=1}^n f(a+ih)$$

c) Sumas centrales



$$A \approx h f\left(a + \frac{h}{2}\right) + h f\left(a + \frac{3}{2}h\right) + h f\left(a + \frac{5}{2}h\right)$$

$$A \approx h \left[f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f\left(a + \frac{3}{2}h\right) + f\left(a + \frac{5}{2}h\right) \right]$$

$$A \approx h \sum_{i=1}^3 f\left(a + \frac{2i-1}{2}h\right)$$

En general

$$A \approx h \sum_{i=1}^n f\left(a + \left(\frac{2i-1}{2}\right)h\right)$$

Ejemplo:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8.6666$$

Tarea:
Hacer menú con los tres programas

