UNIDAD 3.- Límites en una función

Calcular un límite en una función significa investigar a qué valor se aproxima la "y" cuando la "x" se aproxima a un número.

¿A qué valor se aproxima $y = 5x^2 - 2$ cuando x se aproxima a 1?

Podemos sustituir $y = 5(1)^2 - 2 = 3$

En notación formal

$$\underbrace{\lim_{x \to 1} (5x^2 - 2) = 3}_{\text{Se lee: límite cuando x tiende a 1 de } 5x^2-2 \text{ es igual a 3}}$$

Significa que cuando x se acerca a 1, la "y" se acerca a 3

Ejemplo: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5}{3x + 2}$ Sustituyo

$\frac{(2)^2 - 5}{3(2) + 2} = \frac{-1}{8}$, ó o $\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5}{3x + 2} = -\frac{1}{8}}$

Podemos decir que en muchos casos calcular un límite solo es sustituir un valor en una función, sin embargo, habrá casos donde no es tan fácil pues por ejemplo se obtendrá una indeterminación

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{2x-6}$

Sustituyo

$$\frac{(3)^2-9}{2(3)-6} = \frac{9-9}{6-6} = \frac{0}{0}$$

intermrnación ¿Qué significa esto?

Cuando nos da $\frac{0}{0}$ si hay límite pero este se obtiene factorizando el numerador y denomrnador y luego cancelando la intermrnación.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{2x-6} \underset{\text{Factorizo}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{2\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{2}$$

$$\underset{\text{sustituyo}}{=} \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{2x-6} = 3}$$

Ejemplo: Hallar $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-7x+6}$

Evalúo

$$\frac{(1)^2+2(1)-3}{(1)^2-7(1)+6} = \frac{0}{0} \quad \text{¡Factorizo!}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-7x+6} \underset{\text{Factorizo}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{(x-6)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x-6} = \frac{1+3}{1-6} = \frac{4}{-5}$$

Ejemplo: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-16}{x^2-x}$

sustituyo

$$\frac{(2)^2-16}{(2)^2-2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^2-16}{x^2-x} = -6}$$

¡Solo se factoriza si obtienes $\frac{0}{0}$!

Ejemplo: Hallar $\lim_{x \to 3} \frac{4x-1}{x^3-27}$

sustituyo

$$\frac{4(3)-1}{(3)^3-27}=\frac{11}{0}$$ ¡infinito!

Los límites de la forma $\frac{a}{0}$ con $a \neq 0$ son infinitos

¡No se factoriza!

Ejemplo: Hallar $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x^2+2x-15}$

sustituyo $\frac{(3)^3-27}{(3)^2+2(3)-15}=\frac{0}{0}$ ¡Factorizo!

Nota: técnica informal

Sustituye un valor cercano a 3 por ejemplo 2.999 $\longrightarrow \frac{(2.999)^3-27}{(2.999)^2+2(2.999)-15} = 3.374$

Formal $\longrightarrow$ Factorizo

Dif. cubos $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x^2+2x-15} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}(x+5)}$$

x^2+bx+c

Sumados den 2, mult. -15

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+5} = \frac{(3)^2+3(3)+9}{3+5}$$

$$= \frac{27}{8} = 3.375$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$$

Sustituyo

$$\frac{(4)^2 - 16}{\sqrt{4} - 2} = \frac{0}{0}$$

¡Factorizo!

Informal

3.999

$$\frac{(3.999)^2 - 16}{\sqrt{3.999} - 2} = 31.994$$

Formal

Dif. de cuadrados

Diferencia de cuadrados

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{\sqrt{x} - 2}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(\sqrt{x} - 2)}(\sqrt{x} + 2)(x+4)}{\cancel{\sqrt{x} - 2}}$$

$$= \lim (\sqrt{x}+2)(x+4) = (\sqrt{4}+2)(4+4)$$
$$= (2+2)(8)$$
$$= (4)(8) = 32$$