Derivada de una función

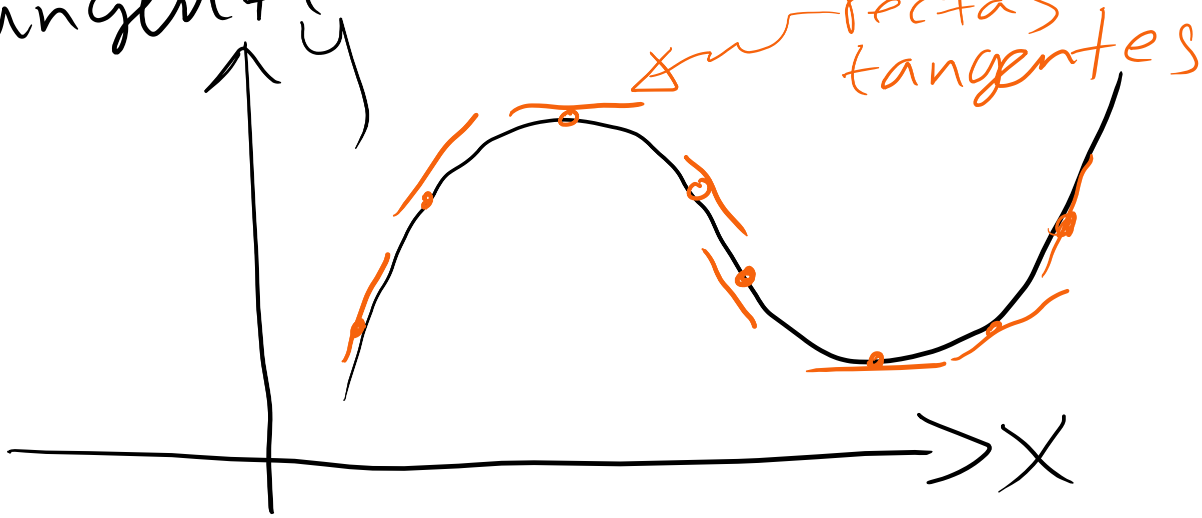
En la vida las cosas que cambian son interesantes, aquello que no cambia es aburrido y predecible.

Nos interesa estudiar matemáticamente el cambio de las funciones, para ello se usa la derivada.

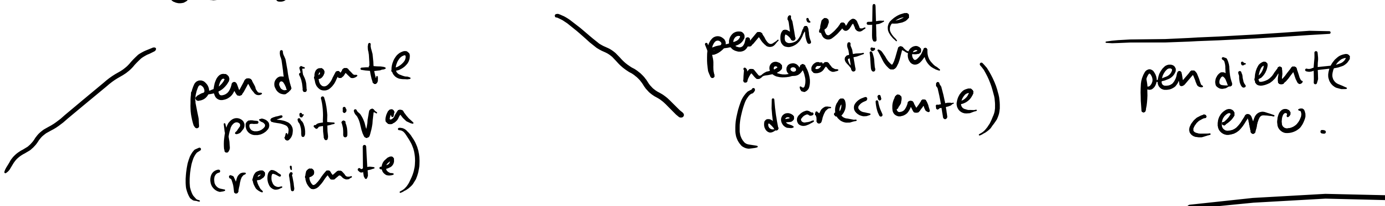
La derivada también es conocida como la "velocidad".

DERIVADA = Herramienta para medir el cambio en una función (velocidad)

Geométricamente la derivada representa la pendiente de la recta tangente a una función.



<u>Nota:</u> La pendiente de una línea es una medida de su inclinación

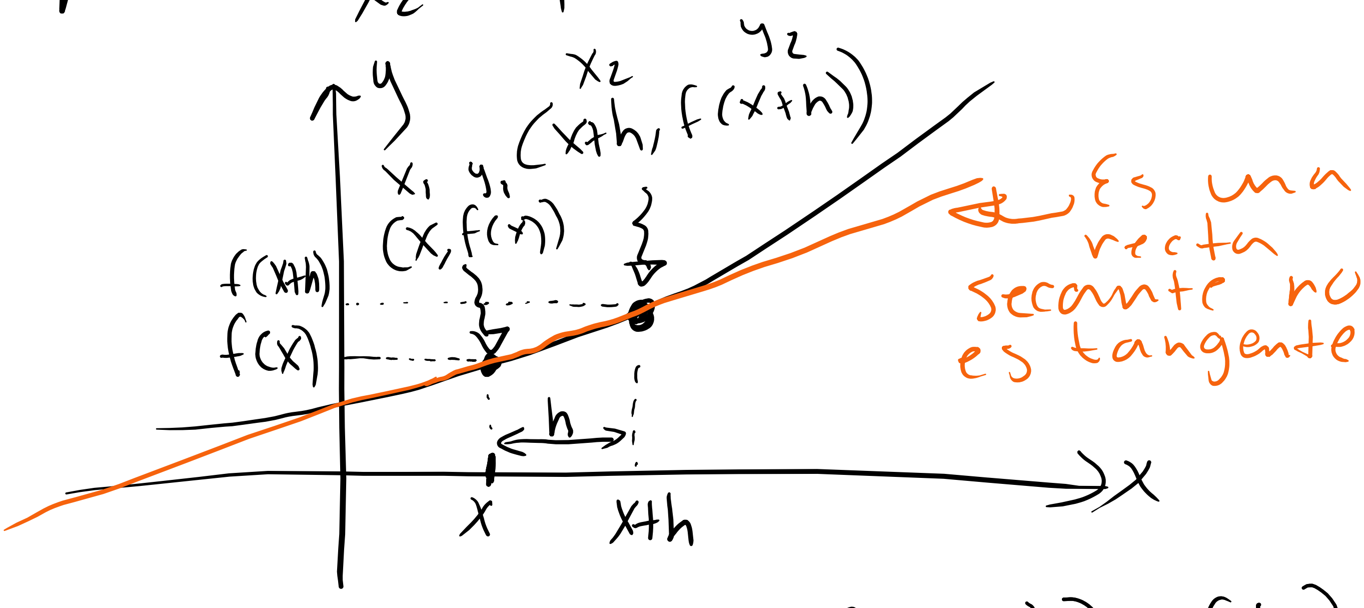


De lo anterior podemos decir que si la derivada es positiva la función crece, si es negativa decrece y si es cero no cambia (Ni crece ni decrece)

¿Cómo se calcula la derivada?

Por ser una pendiente de una recta podemos usar la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{\cancel{x} + h - \cancel{x}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para hacer la recta tangente hacemos que h se aproxime a cero.

Entonces $\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$

$f'(x)$ se lee f prima de x
o derivada de f

"La deriva es un límite de la forma $\frac{0}{0}$"

Cuando calculamos la derivada de una función se obtiene otra función

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2 - 2x + 1$
Hallar su derivada

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definición de la derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) + 1 - (x^2 - 2x + 1)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{- 2x} - 2h \cancel{+ 1} \cancel{- x^2} \cancel{+ 2x} \cancel{- 1}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 2h}{h}$$ Factorizo

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h - 2)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (2x + h - 2)$$

Sustituyo

$$\boxed{f'(x) = 2x - 2}$$

Conclusión:

$$\underbrace{f(x) = x^2 - 2x + 1}_{\text{Función}} \longrightarrow \underbrace{f'(x) = 2x - 2}_{\text{Derivada}}$$

Calcular la derivada usando límites es muy tedioso pues se debe factorizar ya que es de la forma $\frac{0}{0}$ pero lo podemos hacer con fórmulas de derivación.

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 8x - 3 \longrightarrow f'(x) = 12x^2 - 10x + 8$$

$$f(x) = 7x^6 - 4x^5 + 9x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 4$$

La derivada sería

$$f'(x) = 42x^5 - 20x^4 + 36x^3 - 18x^2 + 16x - 3$$

En general

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ f(x) = ax^n \xrightarrow{\text{Potencia}} f'(x) = nax^{n-1} \\ 2)\ f(x) = ax \xrightarrow{\text{lineal}} f'(x) = a \\ 3)\ f(x) = a \xrightarrow{\text{constante}} f'(x) = 0 \end{array}}$$

Ejemplos: Hallar la derivada

1) $f(x) = 11x^6 - 7x + 8x^3 - 2$

Solución: $f'(x) = 66x^5 - 7 + 24x^2$

2) $f(x) = \frac{9}{5}x^2 - \frac{3}{4}x + 8 - \frac{3}{2}x^3$

Hallar $f'(4)$ ← la derivada sustituida en 4

Solución: $f'(x) = \frac{18}{5}x - \frac{3}{4} - \frac{9}{2}x^2$

$$f'(4) = \frac{18}{5}(4) - \frac{3}{4} - \frac{9}{2}(4)^2 = -\frac{1167}{20}$$

Tarea: 1) Hallar la derivada y evaluarla en el punto que se indica

a) $f(x) = \frac{7}{5}x^7 + 9x^2 - 2$, $f'(3)$

b) $f(x) = \frac{9x^2 - 5x + 1}{7}$, $f'(1)$

$\rightarrow \frac{9}{7}x^2 - \frac{5}{7}x + \frac{1}{7}$

2) Buscar un formulario de derivadas