UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL SUR

IVÁN CARRILLO DÍAZ

MATEMÁTICAS III Y IV, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

UNIDAD 2: FUNCIONES RACIONALES Y CON RADICALES

FEBRERO DE 2015

ÍNDICE

APRENDIZAJES

El alumno:

En relación a funciones racionales

- Explora situaciones o problemas que dan lugar a una función racional, en particular las que involucran variación inversa o inversamente proporcional al cuadrado de la variable. Analiza las relaciones y comportamientos que le permitan obtener información para establecer su representación algebraica.
- Establece la regla de correspondencia de una función racional, asociada a un problema.
- A partir de la regla de correspondencia de una función racional, elabora una tabla de valores que le permita construir su gráfica e identifica su(s) punto(s) de ruptura y asíntotas.
- **Da una definición intuitiva de función continua como aquella que no tiene valores prohibidos (polinomio) y concluye que en general las funciones racionales no son continuas por tener asíntotas verticales y agujeros. (Agregado)**
- Identifica el dominio de definición y el rango de una función racional, a partir de su regla de correspondencia y de las condiciones del problema.
- Interpreta los resultados de la tabla o de la gráfica de una función racional, y obtiene conclusiones sobre el problema correspondiente.
- **Reconoce que una indeterminación de la forma $\frac{a}{0}$ en una función racional representa una asíntota vertical ubicada en el valor de x que es raíz del denominador, así como también se da cuenta de que si una raíz del denominador coincide con una del numerador ($\frac{0}{0}$), se genera un agujero en la gráfica para dicha raíz común. (Agregado)**
- **Se da cuenta que solo los agujeros y asíntotas verticales representan discontinuidades en una función racional y que las asíntotas oblicuas y horizontales representan el valor "al que tiende" la función cuando su variable independiente crece o decrece infinitamente. (Agregado)**
- **El alumno reconoce que para hacer la gráfica de una función racional lo fundamental es el análisis de la función y no la tabulación. (Agregado)**
- **Será capaz de determinar las nuevas características algebraicas y geométricas de una función racional obtenida mediante la traslación de otra conocida. (Agregado)**
- Resuelve problemas sobre valores extremos, en una función racional, por medio de una aproximación numérica.

Respecto a las funciones con Radicales:

- **El alumno distingue las diferencias fundamentales entre una igualdad y una desigualdad, en particular que la desigualdad tiene infinitas soluciones y que si se multiplica o divide por un número negativo el sentido se invierte. Además da una interpretación geométrica de las mismas. (Agregado)**
- Explora en una situación o problema que da lugar a una función con radicales, las relaciones y comportamientos que le permitan obtener información para establecer su representación algebraica.
- Establece la regla de correspondencia de una función con radicales, asociada a un problema.
- A partir de la regla de correspondencia de una función con radicales, elabora una tabla de valores que le permita construir su gráfica.

- Identifica el dominio y rango de una función con radicales, a partir de su regla de correspondencia y de las condiciones del problema.
- Interpreta los resultados de la tabla o de la gráfica, de una función con radicales, y obtendrá conclusiones sobre el problema correspondiente.
- **A partir de la gráfica del polinomio radicando el alumno es capaz de determinar cualitativamente la gráfica de la función con radical, dependiendo del índice del radical. (Agregado)**
- Resuelve problemas sobre valores extremos, por medio de aproximaciones numéricas en las cuales se utilicen funciones con radicales.

TEMÁTICA

FUNCIONES RACIONALES

- Situaciones que dan lugar a funciones racionales.
- **Noción de continuidad en una función. (Agregado)**
- **Tipos de funciones racionales. (Agregado)**
- Noción de intervalo en la recta real.
- Estudio del comportamiento analítico y gráfico; local y al infinito por medio del dominio y rango de las funciones del tipo: $f(x)=\frac{a}{x+b}+c$, $f(x)=\frac{a}{(x+b)^2}+c$, a, b y c números reales $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, con P(x) y Q(x) hasta de cuarto grado pero con raíces reales.

FUNCIONES CON RADICALES

- **Resolución de desigualdades lineales, cuadráticas y cúbicas. (Agregado)**
- **Interpretación geométrica de una desigualdad. (Agregado)**
- Situaciones que dan lugar a funciones con radicales del tipo $f(x)=\sqrt{ax+b}$, $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$
- Estudio analítico y gráfico del dominio y el rango de una función del tipo anterior.
- **Análisis de una función racional como la raíz de un polinomio. (Agregado)**
- Resolución de problemas con fenómenos de diversa índole (geométricos y físicos), susceptibles de modelarse a través de funciones racionales o con radicales.

Propósito de la Unidad

Continuar con el estudio de las funciones, a través de las funciones racionales y con radicales. Analizar su comportamiento en el que cobra relevancia identificar su dominio de definición, su rango y los puntos de ruptura.

1.- Introducción a las funciones racionales

1ra sesión (2 horas)
Exposición por parte del profesor

En esta parte de la unidad vamos a analizar un tipo muy especial de funciones que son los cocientes de polinomios, éstas tienen características muy especiales que descubriremos muy pronto, enparticular por ser cocientes el denominador no puede valer cero, por lo tanto van a tener valores prohibidos. Vamos a motivar su estudio a través de los siguientes ejemplos:

En el curso de Matemáticas 1 en la unidad 2 como bien recordamos se analizó el problema de dos variables que se relacionaban en forma directamente proporcional. En aquella ocasión, se había visto que la variable "y" era directamente proporcional a la variable "x" cuando se relacionaban en la forma y=kx, donde k era una constante de proporcionalidad. El lugar geométrico de los puntos que satisfacían la relación anterior era una línea recta que pasaba por el origen y que precisamente tenía una pendiente k.

Vamos a analizar ahora otro tipo de relación entre variables llamada variación inversa.

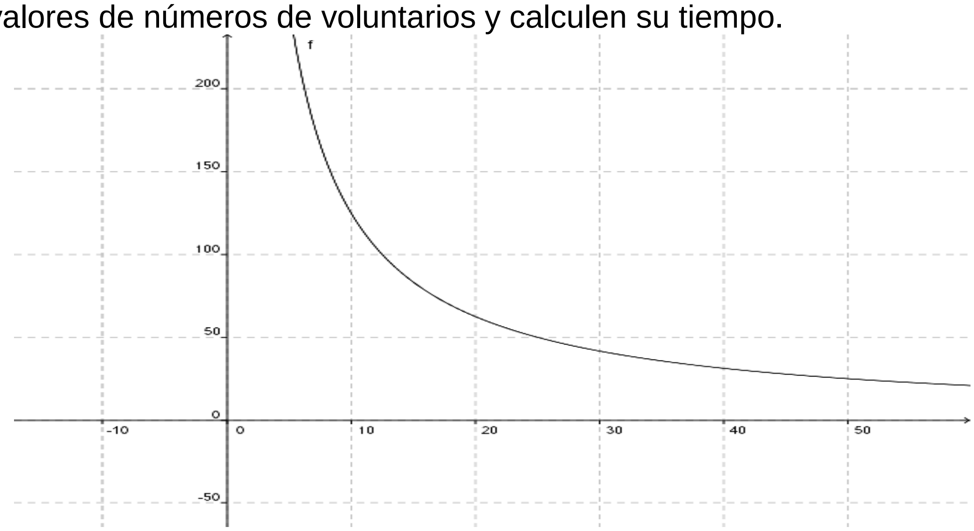
Una variación inversa es una relación entre dos variables *x* y "*y*" que puede ser escrita de la forma y=k/x, donde k≠ 0. Para la ecuación y=k/x, "y" varía inversamente con x.

Actividad para los alumnos (Individual o en equipos de 3) pero guiada por el profesor.
Escribiendo y Graficando Variación Inversa:

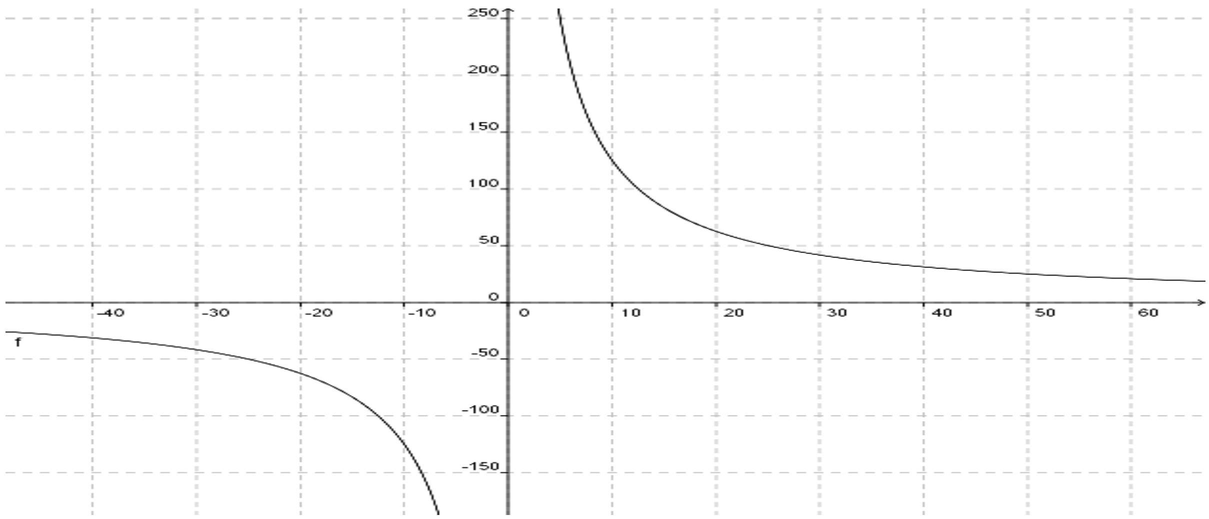
1.-El tiempo *t* que le toma a un grupo de voluntarios construir una casa varía inversamente con el número de voluntarios *v.* Si 20 voluntarios pueden construir una casa en 62.5 horas, ¿cuántos voluntarios se necesitarán para construir una casa en 50 horas? Escribe una expresión general que relacione el tiempo y el número de voluntarios. ¿Qué sucede entre más grande sea el número de voluntarios?, ¿Si el número de voluntarios disminuye que le pasa al tiempo de construcción? Elabora una gráfica, donde consideremos el tiempo como variable independiente y como variable independiente el número de voluntarios.

Comentario: Este problema por ser el primero de la unidad en principio si les genera dudas, sin embargo, gracias a la mediación del profesor se disipan. En primer lugar la sugerencia es que calculen la k con los datos iniciales. En este punto, ellos se dan cuenta que la relación es $t = \frac{1250}{v}$, de aquí deducen mediante un despeje que para que t=50, v debe ser 25. Otra sugerencia es que para graficar den varios valores de números de voluntarios y calculen su tiempo.

v	t=1250/v
10	125
20	62.5
25	50
30	125/3
40	31.25



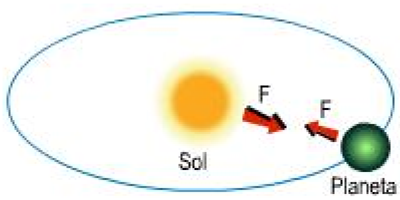
En principio la gráfica que trazan solo incluye valores positivos del número de voluntarios y se dan cuenta de que mientras menos voluntarios (tienden a cero) mayor es el número de horas y entre más voluntarios haya, el tiempo se hace cada vez menor.
Posteriormente es bueno sugerirles que tomen la función en abstracto y grafiquen permitiendo que la variable independiente pueda ser negativa.



Es bueno sugerirles que evalúen la función para valores de v cercanos a cero o muy grandes y cuestionarlos sobre el resultado y su interpretación.

2.- Ley de la atracción gravitacional de Newton

Se sabe por la ley de gravitación de Newton que la fuerza con que dos masas se atraen es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa ¿Cuál es la expresión de la ley?

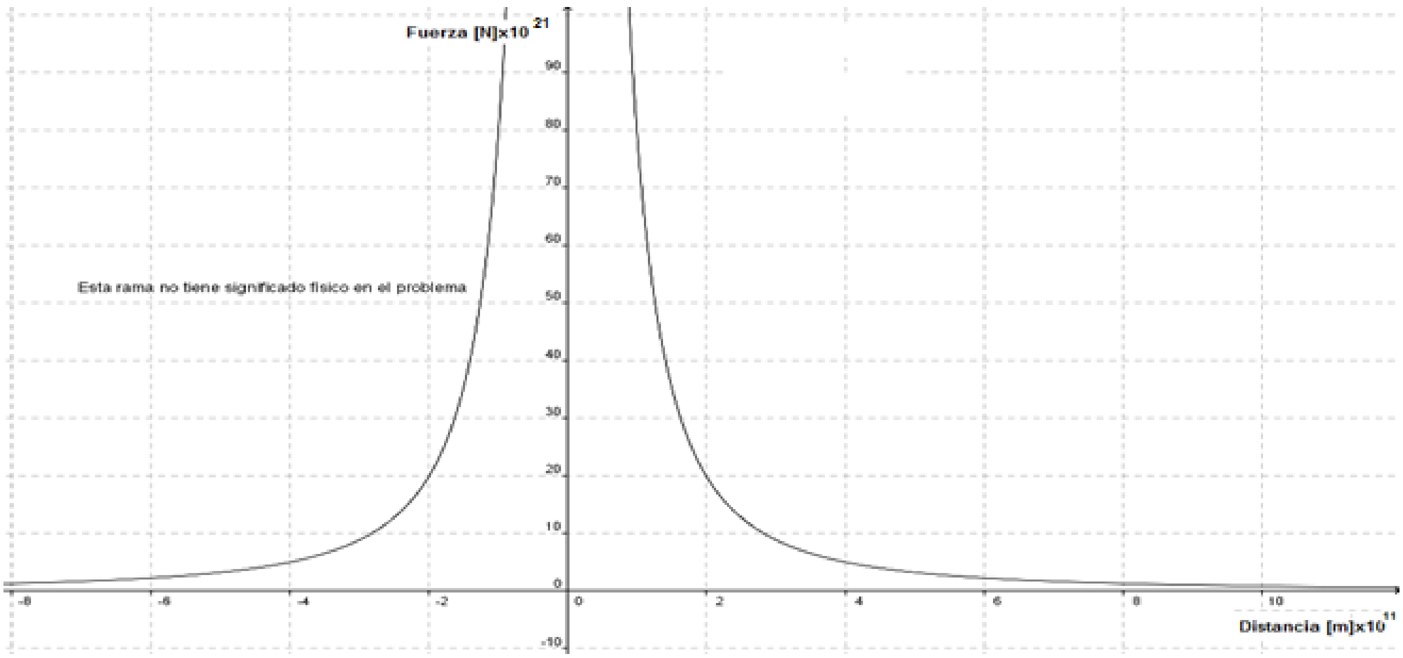


Comentario: Para este problema los jóvenes ya cuentan con un ejemplo que fue el problema anterior y se les hace relativamente fácil plantear como expresión: $F = \frac{Km_1 m_2}{r^2}$ donde m_1 y m_2 son las masas, r la distancia entre ellas y K una constante de proporcionalidad.

Como siguiente actividad vamos a sugerirles a los alumnos que sustituyan $K=6.67x10^{-11}Nm^2/kg^2$ y $m_1=5.97x10^{24}kg$ y $m_2=1.99x10^{30}kg$ y grafiquen la función anterior.

Aquí es importante ayudar a los jóvenes a hacer la gráfica debido a las potencias de 10 que se tienen, ya que $\frac{10^{-11}\times 10^{24}\times 10^{30}}{(10^{11})^{2}}=10^{21}\,Newton$ son las unidades de la fuerza. Basta que grafiquen la función $F=\frac{79.24}{r^{2}}$

A la variable r por el contexto de problema solo le pueden dar valores positivos, sin embargo sería recomendable que también la graficaran para valores de r negativos. ¿Podría valer r=0?



Preguntas para los alumnos: ¿Qué le pasa al valor de la fuerza cuándo la separación entre las masas se hace muy grande? ¿Y cuándo la distancia se hace muy pequeña?

Hallar el cambio en la fuerza $\Delta F=F(r_2)-F(r_1)$ cuando r varía de $r_1=1.5\text{x}10^{11}$m a $r_2=1.49\text{x}10^{11}$m.

De una interpretación de lo anterior si m_1 es la masa de la tierra y m_2 la masa del sol.

Tarea: Analiza y grafica los siguientes problemas

Ley de Boyle

Esta ley señala que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo. Escribe una representación algebraica de dicha ley. Grafica la función. ¿Existe algún valor prohibido para la variable independiente? ¿Por qué?

Resistencia eléctrica

La resistencia eléctrica de un alambre varía directamente con su longitud e inversamente con el cuadrado de su diámetro. Expresa algebraicamente el enunciado anterior. Grafica la función. ¿Existe algún valor prohibido para la variable independiente? ¿Por qué?

2.- Desarrollo funciones racionales

2da sesión (2 horas) Definición de función racional (por parte del profesor pero motivada por los alumnos)

¿Qué fue lo que notaron de los problemas resueltos en la sesión anterior, incluyendo los de su tarea?

Se espera que los alumnos respondan que los modelos matemáticos asociados (funciones) a los problemas vistos, son cocientes y que se observa que el denominador no puede valer cero. Además en el valor que hace que el denominador valga cero la función se comporta como línea vertical. Y para valores grandes de la variable independiente la función se comporta como línea horizontal.

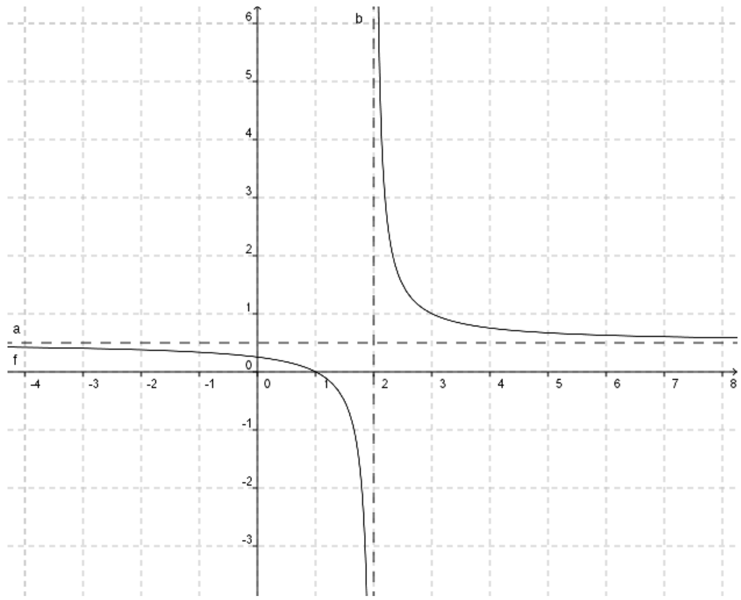
Vamos a definir una función racional como una expresión de la forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con P(x) y Q(x) polinomios. En el caso de los ejemplos que analizamos en la sesión anterior P(x) era un polinomio constante y Q(x) fue de primero y segundo grado respectivamente. Pero tanto P(x) como Q(x) podrían ser de mayor grado y en principio sin restricción. En los ejemplos anteriores como bien pudieron notar compañeros alumnos, las gráficas no intersectaban al eje x.

Reflexión entre todo el grupo.

Como recordamos de la unidad 1 para que una función intersecte al eje x debe hacerse cero. ¿Cuándo un cociente vale cero? Respuesta esperada: Cuando el numerador vale cero. Como en los ejemplos anteriores los numeradores son funciones constantes (sin variables) nunca se hacen cero, debido a esto no hay intersecciones con el eje x. Para que la gráfica toque al eje x esperaríamos que el numerador se haga cero. Analicemos dos ejemplos.

a) Sea la función $f(x)=\dfrac{x-1}{2x-4}$ vamos a analizarla.

¿Qué valor no puede tomar la x, por qué si lo hiciera generaría una indeterminación? Respuesta esperada: por ser un cociente el denominador no puede valer cero. ¿Qué valor de x hace que el denominador sea cero? Respuesta esperada: resolvamos la ecuación 2x-4=0, su solución es x=2. Entonces si es correcta la observación de los problemas anteriores en x=2 la función se comportará como línea vertical. En la unidad 1 vimos la notación de intervalos para expresar conjuntos infinitos de números, por lo tanto el dominio de esta función racional sería $x\in(-\infty,2)\cup(2,\infty)$. Ahora bien donde el numerador del cociente se hace cero, claramente para x=1, esto quiere decir que la función intersectará al eje x en x=1, ¿Cómo hacíamos en la unidad 1 para determinar la intersección de los polinomios con el eje y? Respuesta esperada: sustituíamos x=0 en la función, y si hacemos lo mismo en la función racional, lo que obtenemos es y=1/4. Análogamente a los ejemplos de la sesión anterior evaluemos la función para valores grande de “x” tanto negativos como positivos, f(1000)=0.5005, f(2000)=0.5002, notamos que la función tiende a comportarse como la línea horizontal y=0.5, ¿Será el mismo valor que se obtiene de dividir los coeficientes principales del numerador y denominador?
¿Se podrá hacer un bosquejo de la gráfica sin tabular?, o si se tabulara tratar de dar la menor cantidad de puntos. Es importante recomendar a los alumnos que con la información anterior intenten hacer la gráfica y después de un tiempo razonable que el profesor la haga con geogebra.

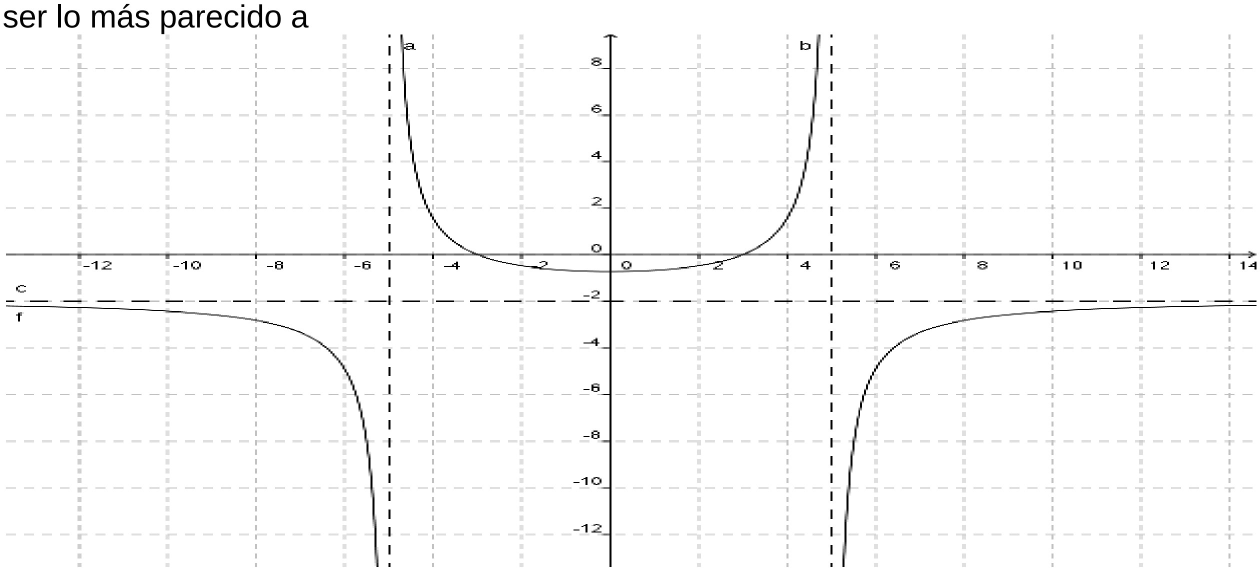


Las asíntotas verticales son líneas rectas imaginarias que se ubican en los valores de x donde el denominador se hace cero, es importante notar que el numerador no se hace cero en ese valor, nunca pueden ser cruzadas por la gráfica ya que representan valores prohibidos, pero como puedes darte cuenta las asíntotas horizontales no representan discontinuidades en la función sino comportamientos, por lo tanto, en principio si podrían ser cruzadas por la función.

Ejercicios para los alumnos en equipo o individual (con orientación del profesor). Se recomienda dar un tiempo razonable para que los alumnos en el salón hagan los dos ejercicios.

Analiza las siguientes funciones a) $f(x)=\frac{2x^2-18}{-x^2+25}$ b) $f(x)=\frac{3x-5}{x^2+x-12}$ y grafícalas.

a) Se espera que los alumnos concluyan que en el primer caso que la función tiene dos valores prohibidos que son x=5 y x=-5 en los cuales es donde se ubican las asíntotas verticales. Además, también que tiene dos intersecciones con el eje x, ubicadas en 3 y -3 y si la evalúan para valores grandes de x positivos y negativos, se aprecia que la función tiende a -2, que de hecho es el mismo valor que el cociente de los coeficientes principales. Además para la intersección con el eje "y" se obtiene un valor de -18/25. Su gráfica deberá ser lo más parecido a



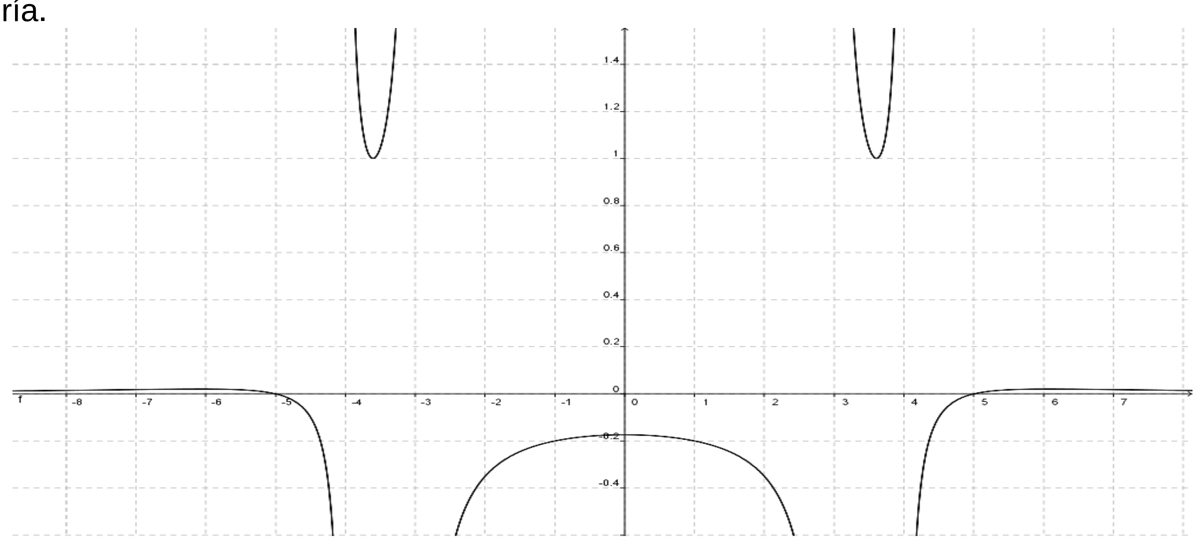
b) En el caso de la función $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2+x-12}$ lo más importante que deben notar los alumnos es que la asíntota horizontal es el eje x, es decir la recta y=0, y además que se den cuenta de la función si atraviesa la asíntota horizontal (corta al eje x en x=5/3)

Reflexión después de que acabaron los ejercicios:
Cuando el grado del numerador es igual al grado del denominador, ¿En dónde se ubica la asíntota horizontal?
Cuando el grado del numerador es menor al grado del denominador, ¿En dónde se ubica la asíntota horizontal?

Tarea: Es recomendable poner una función racional que incluya un polinomio de grado mayor que 2, por ejemplo $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x^4-25x^2+144}$, esta función es muy interesante, en la literatura se conoce como "The bidget´s town" (el puente del pueblo) y vale la pena analizarla en una sesión de una hora y valorar con participaciones a los alumnos que la logren hacer bien.

3ra sesión (1 hora) Análisis de la función del puente del pueblo.

De hecho aunque el numerador sea de grado 4, es bicuadrático, y por lo tanto se puede usar la fórmula general. Se espera que se obtenga la siguiente gráfica, la cual tiene aplicaciones en la ingeniería.



Tarea: Una vez establecidos ciertos aspectos teóricos es importante dejar de tarea algunos problemas aplicados pero más complicados.

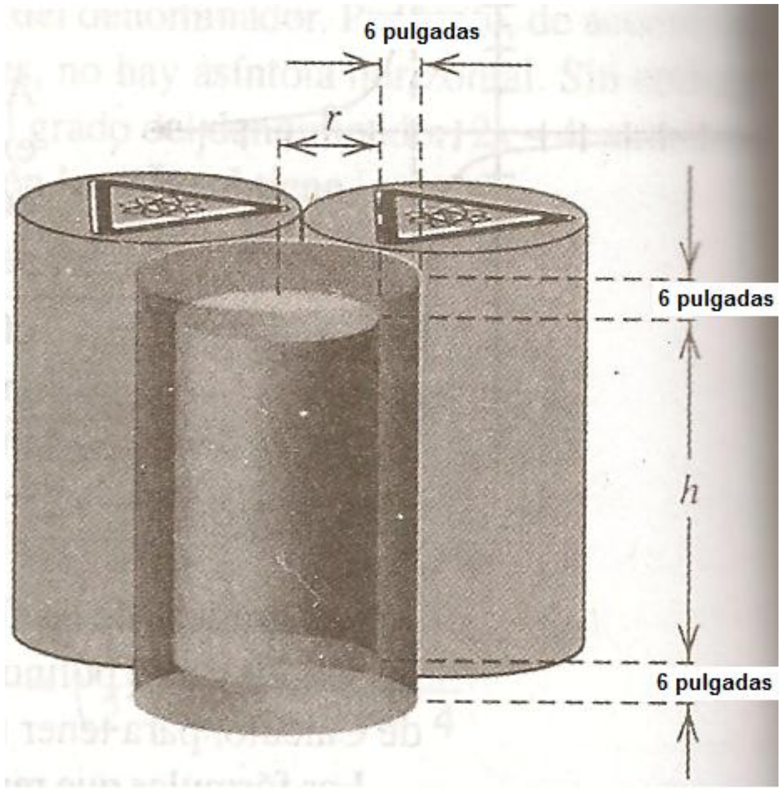
<u>Recipiente para desechos radiactivos.</u>

Se construirá con plomo un recipiente cilíndrico para almacenar desechos radiactivos. Este recipiente debe tener 6 pulgadas de espesor. El volumen del cilindro exterior, que se ve en la figura, debe tener 16πpies3.
a) Exprese la altura, h, del cilindro interior, en función del radio interior, r.

b) Demuestre que el volumen interior, V(r) está expresado por $V(r)=\pi r^2\left[\dfrac{16}{(r+0.5)^2}-1\right]$

c) ¿Qué valores de r se deben excluir en la parte b)? Se recomienda que sumes las fracciones para hacer el análisis de la función expresada en la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$

d) Elabora la gráfica de la función.



4ta Sesión (2 horas) Se recomienda que si hay dudas en la resolución del ejercicio que se dejó de tarea éstas se aclaren iniciando la sesión.

Como has notado en todos los ejemplos que has hecho hasta ahora, las funciones racionales tienen valores prohibidos, en general son las raíces del denominador. Cuando una función tiene valores prohibidos, su gráfica no pasa a través de ellos. Podemos intuitivamente decir que la gráfica se "rompe" al pasar a través de los valores prohibidos. En términos más formales se dice que la función es discontinua y que precisamente estas discontinuidades se localizan en las raíces del denominador. Como primera definición podemos decir que una función es discontinua cuando tenemos que despegar el lápiz del papel al trazar su gráfica. Debemos resaltar que una asíntota vertical aparece cuando la función tiene una discontinuidad de la forma a/0 con "a" diferente de cero.

Sin embargo, vamos a analizar la siguiente función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6}$

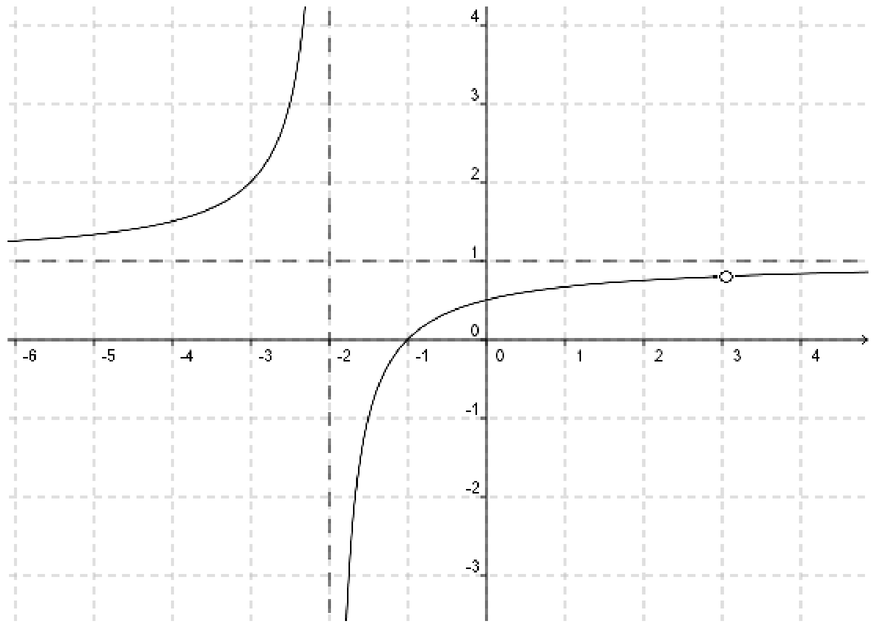
Si encontramos los valores prohibidos al resolver el denominador $x^2-x-6=0$, notamos que tiene dos valores prohibidos que son 3 y -2, sin embargo, si resolvemos el numerador $x^2-2x-3=0$ tiene como raíces 3 y -1, lo que notamos es que 3 genera una indeterminación de la forma 0/0 y -2 una de la forma 5/0. Se sugiere que se pregunte a los alumnos que significa un cero entre un cero. En 3 habrá una asíntota vertical o una intersección con el eje x, se debe dejar que los alumnos reflexionen un momento.

Posteriormente el profesor deberá hacer la gráfica de la función con geogebra.

Preguntas a los alumnos:

¿Porqué no hubo asíntota vertical en x=3?

¿Porqué no hubo una intersección con el eje x en x=3?



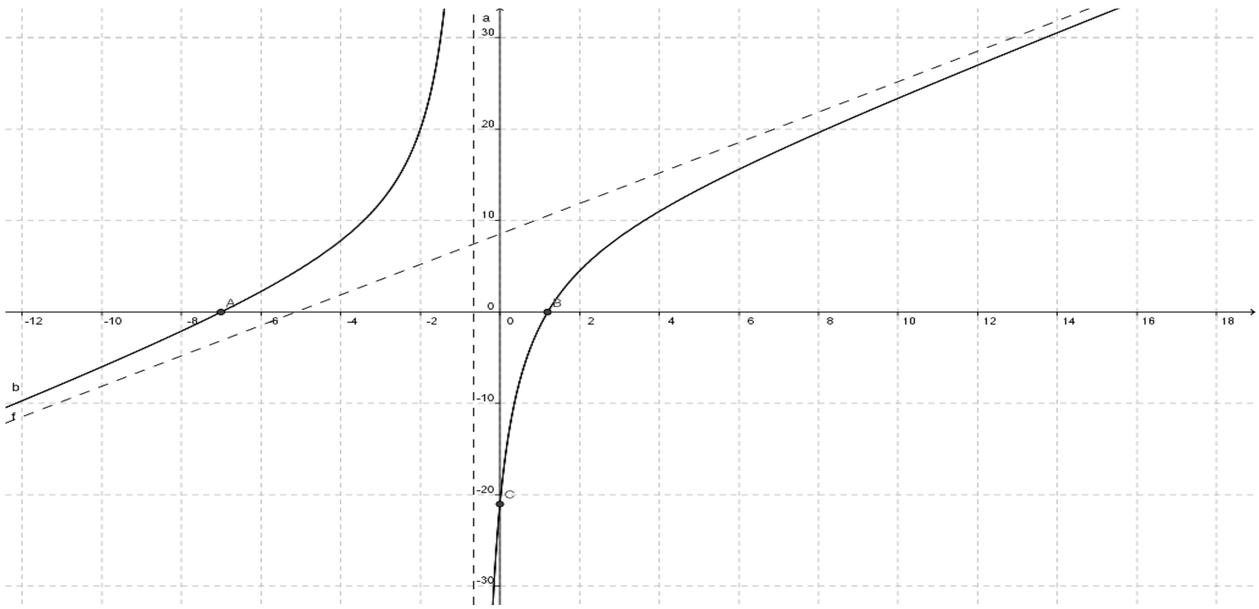
Puede verse que en una indeterminación de la forma 0/0 aparece un agujero en la función, no es ni una asíntota vertical, ni una intersección con el eje x. Una pregunta interesante sería ¿Cuál es la coordenada “y” del agujero? En principio la podríamos calcular evaluando la función para un valor cercano a 3 pero no 3.
Es importante mencionar que en esta unidad no vamos a analizar funciones que tengan agujeros como discontinuidades, solo asíntotas verticales, en el curso posterior de cálculo diferencial, a través del concepto de límite de una función se profundizará en el estudio de los agujeros en las funciones racionales.

Ejercicio para los alumnos: Analiza la siguiente función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2}{3x^2 + x - 2}$

5ta sesión (2 horas)
Comentario del profesor: Como pueden darse cuenta hasta el momento hemos analizado funciones racionales en las cuales el grado del numerador es igual que el grado del denominador y funciones racionales en las cuales el grado del numerador es menor que el grado del denominador, y notamos que la única diferencia es la ubicación de la asíntota horizontal. En el primer caso la asíntota horizontal está en el cociente de los términos principales y en el segundo la asíntota horizontal es el eje x.
A continuación vamos a analizar un caso diferente, en el cual, el grado del numerador será mayor que el grado del denominador (en una unidad)

Ejemplo: Analiza la siguiente función $f(x) = \dfrac{5x^2 + 29x - 42}{3x + 2}$ (Profesor y alumno)

Pregunta a los alumnos: ¿Cuáles son los valores prohibidos? y por lo tanto el dominio. En este punto los alumnos responden fácilmente que el único valor prohibido es x=-2/3, ¿será asíntota o agujero?, como el numerador es diferente de cero al evaluarlo en -2/3, se trata de una asíntota vertical. Las intersecciones con el eje x corresponden a las raíces del numerador $5x^2+29x-42=0$, las cuales son 6/5 y -7. Sin embargo, lo que notan los jóvenes cuando evalúan la función para valores grandes de x es que no obtienen un valor constante, lo cual es un indicativo de que no hay asíntotas horizontales. En este punto se sugiere que el profesor haga la gráfica de la función con geogebra.



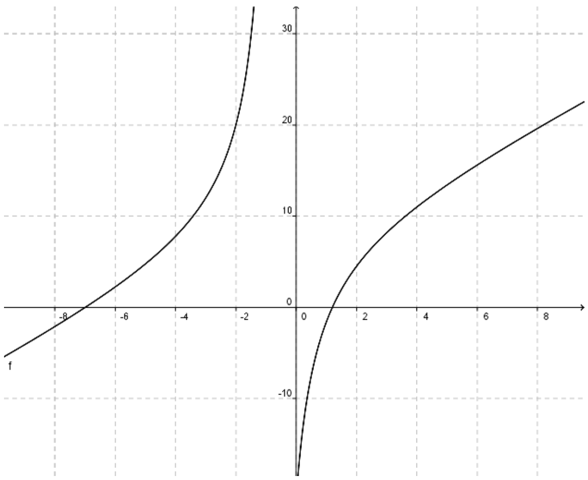
Se puede ver que ahora la gráfica no se comporta como línea horizontal, sino como línea oblicua. Pero ¿cuál es la ecuación de esta línea?, ¿Cómo la obtengo? Algunos alumnos proponen que de dos valores grandes de "x" obtenga sus respectivas "y" al sustituir en la función y luego use la expresión $y-y_1=m(x-x_1)$. Cabe decir que es una muy buena propuesta, sin embargo yo les sugiero que podemos hacer la división del numerador y el denominador y que el cociente será la línea buscada. (Es importante quizás hacer algún ejercicio de división de polinomios para que los jóvenes recuerden como se dividen polinomios.

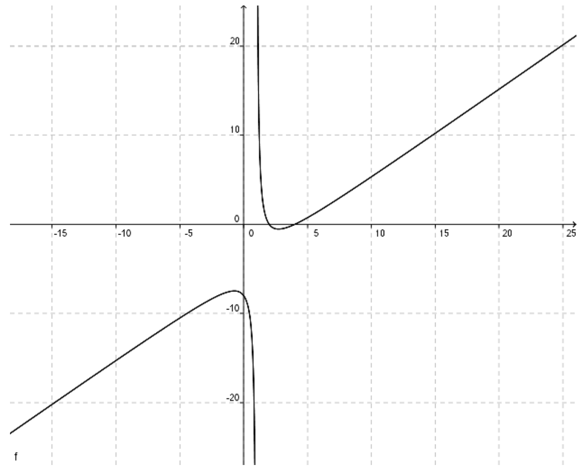
$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{5}{3}x+\frac{77}{9} \\
\hline
3x+2 & 5x^2+29x-42 \\
 & -5x^2-\frac{10}{3}x \\
\hline
 & \frac{77}{3}x-42 \\
 & \frac{-77}{3}x-\frac{154}{9} \\
\hline
 & -\frac{532}{9}
\end{array}
$$

La ecuación de la asíntota oblicua es $y=\frac{5}{3}x+\frac{77}{9}$ que aproximadamente es la misma que se obtendría con el método sugerido por los alumnos.

Ejercicio para los alumnos: Analiza la siguiente función y grafícala $f(x)=\frac{x^2-6x-8}{x-1}$

Se sugiere dar un tiempo razonable a los jóvenes para que resuelvan el problema y atender todas sus dudas. En principio el ejercicio no debería causarles problemas ya que es muy sencillo. Una vez resuelto el problema se puede establecer la conclusión de que si el grado del numerador es 2 y el del denominar 1, la gráfica resultante tendrá una de las siguientes formas:





6ta sesión (1 hora)

En esta sesión se sugiere el siguiente reto para los alumnos: Analiza y grafica la función $f(x)=\dfrac{5x^3+x^2-20x-4}{3x^2+8x-3}$

7ma y última sesión (2 horas)

Recomendaciones para analizar una función racional

1.- Si la función racional no está escrita en la forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se recomienda sumar las fracciones para obtenerla, lo anterior permitirá analizar funciones trasladadas.

2.- Identificar en cuál de los tres casos se está:

a) Grado del numerador igual que el del denominador: La asíntota horizontal se encuentra en la división de los coeficientes principales.

b) Grado del numerador menor que el grado del denominador: La asíntota horizontal será el eje x.

c) Grado del numerador mayor que el grado del denominador (en una unidad): No habrá asíntota horizontal, en cambio habrá una oblicua, la cual tiene por ecuación el cociente de la división larga del numerador y denominador.

3.-Determinar los valores prohibidos, hallando las raíces del denominador, teniendo en cuenta que si no coinciden con las del numerador representarán asíntotas verticales y si coinciden con las del numerador serán agujeros.

4.- Escribir el dominio en notación de intervalos excluyendo los valores prohibidos.

5.- Determinar las intersecciones con el eje x, hallando las raíces del numerador siempre y cuando no coincidan con las del denominador.

6.- Determinar la intersección con el eje y evaluando la función en x=0, excepto si el eje "y" fuera asíntota vertical.

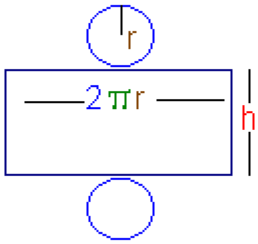
7.- Se puede trazar la gráfica sin tabular sabiendo que las asíntotas verticales nunca pueden ser cruzadas, pero la función se debe aproximar a ellas, de igual forma con las asíntotas horizontales y oblicuas, las cuales si podrían llegar a ser cruzadas.

8.- A veces es necesario tabular unos cuantos puntos, simplemente para definir la posición de la gráfica con respecto a las asíntotas.

9.- Es interesante señalar que en la región en que se intersectan dos asíntotas se forma una región de alta simetría, es decir un círculo en este caso, con un análisis más sofisticado podríamos incluso determinar la ecuación de la circunferencia.

A continuación vamos a analizar el siguiente problema:

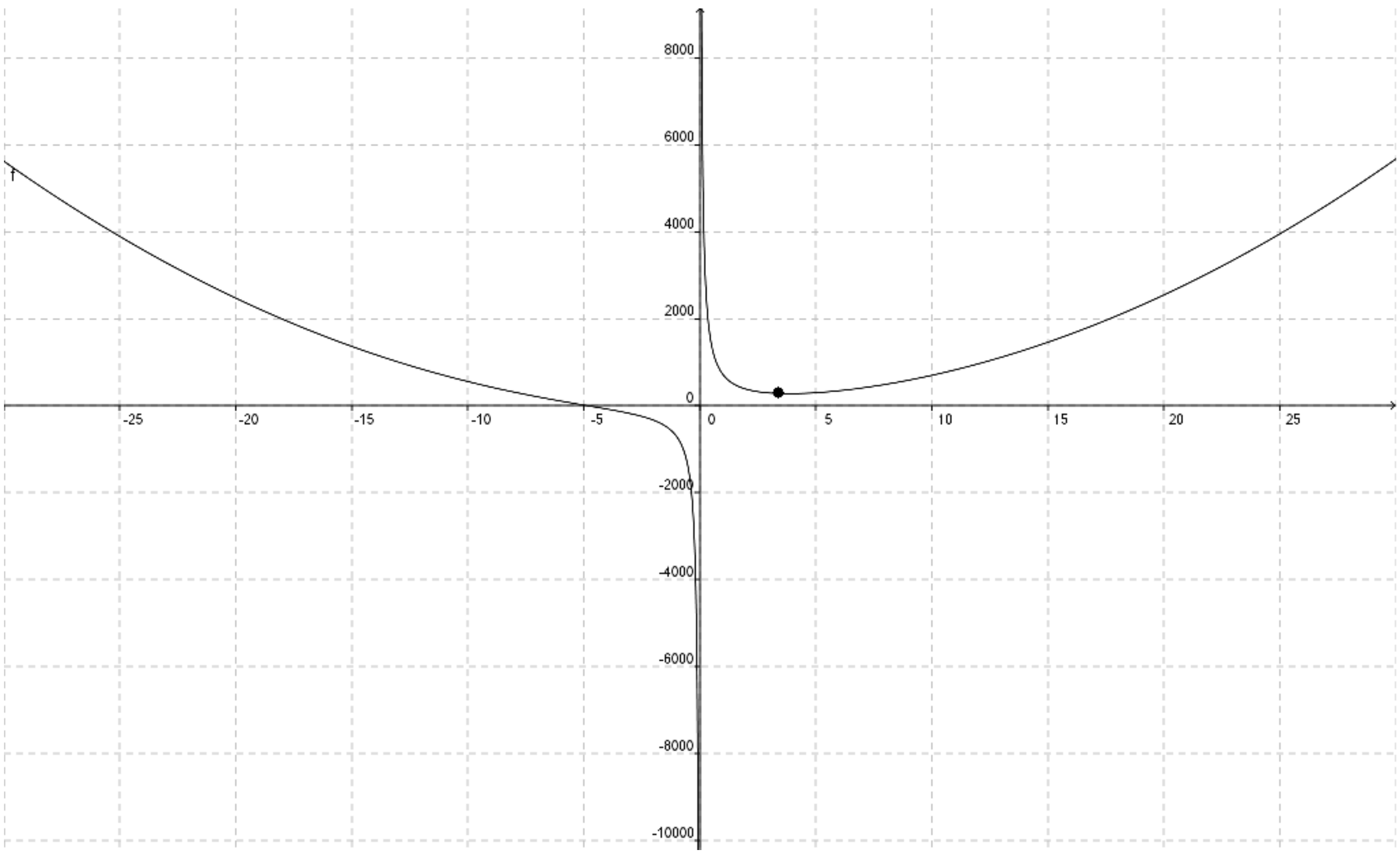
Lata de Coca-Cola
Se desea construir un cilindro que tenga una capacidad de $355cm^3$ (355ml) pero que se gaste en su fabricación la menor cantidad de material posible ¿Cuáles deben ser aproximadamente sus dimensiones?



El volumen de un cilindro es $V=\pi r^2 h$, sustituyendo tenemos $355= \pi r^2 h$
La función que representa el área es $A=2\pi r^2+ 2\pi rh$, despejemos la h para Sustituir en la función de área, $h=\frac{355}{\pi r^2}$ se tiene entonces

$$A=2\pi r^2+\frac{710}{r}=\frac{2\pi r^3+710}{r}$$

Es recomendable que los alumnos la grafiquen.



Se trata de determinar aproximadamente las coordenadas del punto marcado en la gráfica que corresponde al mínimo de la función. Se recomienda que lo anterior lo hagan los alumnos evaluando la función para valores cercanos al mínimo y observando cuál es el que aproximadamente da el valor más chico de área. Después de hacer varios cálculos encuentran que r aproximadamente vale 3.83cm y si sustituyen para hallar h en $h=\frac{355}{\pi r^2}$, se tiene que h es aproximadamente 7.67cm. Podemos concluir que el cilindro de menor área dado un volumen es el que tiene su diámetro igual a su altura. Aquí yo les propongo que lo construyan con papel.

8va sesión (examen parcial) 2 horas

1.- Días para un trabajo.

El número de días que se necesitan para completar un trabajo es inversamente proporcional con el número de hombres que trabajan en él. Si 10 personas realizan el trabajo en 36 días. ¿Cuál es la expresión algebraica?

2.-Limpieza de derrame de petróleo crudo.

El costo, C(x), de limpiar x porcentaje de petróleo crudo que ha llegado a la playa, aumenta mucho cuando x tiende a 100. Suponga que

$C(x)=\dfrac{20x}{101-x}$ (miles de dólares).

a) Compare C(100) con C(90).

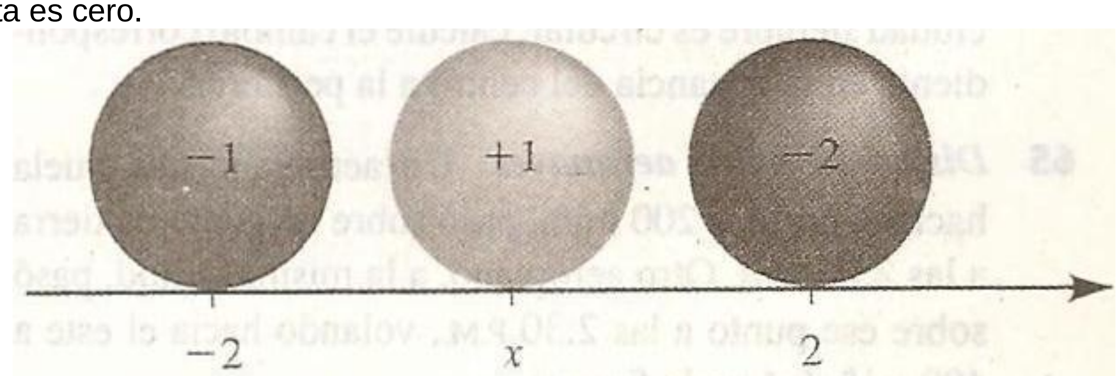
b) Trace la gráfica de C para $0<x<100$.

3.- Ley de Coulomb

Una partícula de con carga -1 está en un eje de coordenadas en x=-2, y una partícula de carga -2, está en x=2, como se ve en la figura. Si una partícula de carga +1 se coloca en una posición x, intermedia entre -2 y 2, la ley de Coulomb en electricidad dice que la fuerza neta F que actúa sobre esta partícula está dada por

$$F=\frac{-k}{(x+2)^2}+\frac{2k}{(2-x)^2}$$

Suponiendo que k=1. Representa gráficamente la función anterior. Calcule la posición en la cual la fuerza neta es cero.



4.- Analiza las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-30}{6x^2-11x-2}$

b) $f(x)=\dfrac{3x+7}{4x^2-11x-3}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-63}{x-1}$

(9na sesión 1 hora)
3.- Introducción a las desigualdades

Antes de comenzar a hablar de las funciones que incluyen radicales, vamos a discutir un concepto muy importante y que es el de desigualdad.
Para ello motivemos con el siguiente problema: ¿Para qué valores de x se satisface la siguiente expresión 2x-6>8?
En general lo que vamos a escuchar es que los jóvenes nos darán valores individuales de x que la satisfacen y quizás solo alguno nos dirá algo del estilo: “todos los números mayores que 7”. Después de escucharlos un poco es importante que les hagamos notar el hecho de que en realidad los números que satisfacen la desigualdad son un conjunto infinito y que efectivamente serán todos aquellos mayores que 7 y que en notación de intervalos se representan como $x \in (7, \infty)$. ¿El 7 puede ser solución? También es importante hacerles ver que si en vez del signo de desigualdad pusiéramos el de igualdad, es decir, 2x-6=8, solo x=7 sería solución.
Con el ejemplo anterior se pueden ir ellos dando cuenta de que una diferencia fundamental entre una desigualdad y una igualdad es que la desigualdad tiene un número infinito de soluciones a diferencia de una igualdad que solo tiene un número finito.

4.- Desarrollo del tema de desigualdades

Ejercicio para los alumnos: ¿Qué valores satisfacen la siguiente desigualdad x^2-9≤0?
En este momento la intención es que los alumnos traten de pensar ya que no hemos establecido aún ninguna técnica para resolver una desigualdad.
En este caso muchos alumnos responderán que todos los números entre -3 y 3 incluyendo al 3 y -3 son solución, muy pocos alumnos responderán valores individuales como solución, en notación de intervalos sería $x \in [-3,3]$, es importante recomendarles que elaboren una recta numérica y representen la solución en ella.

Nota: Date cuenta que en ambos problemas la solución de la igualdad representó una frontera del intervalo solución de la desigualdad.

Pregunta para los alumnos: ¿Cuál sería tu definición de desigualdad? Respuesta esperada: Una expresión donde se tiene que una cantidad es mayor que otra o viceversa y que tiene por solución un conjunto infinito de valores (un intervalo).

A continuación pongamos una desigualdad un poco más difícil: x^2-3x-10<0. A la mayoría de los alumnos les costará un poco de trabajo sin embargo, debido a la nota anterior algunos alumnos dirán que la solución es $x \in (-2,5)$, en este punto, es importante pedirles a los alumnos que si lo resolvieron bien que nos digan cuál fue su técnica. Respuesta esperada: La resolví como si fuera igualdad y luego tome un valor de cada intervalo que definían las soluciones de la igualdad y los que la cumplieron esos tomé.
Lo más importante es que los alumnos lleguen a la conclusión anterior, pero si no es así, es importante que el profesor la establezca.

Es importante poner algún otro ejercicio a los alumnos para ver si asimilaron la técnica que se describió, después de ello podemos concluir:

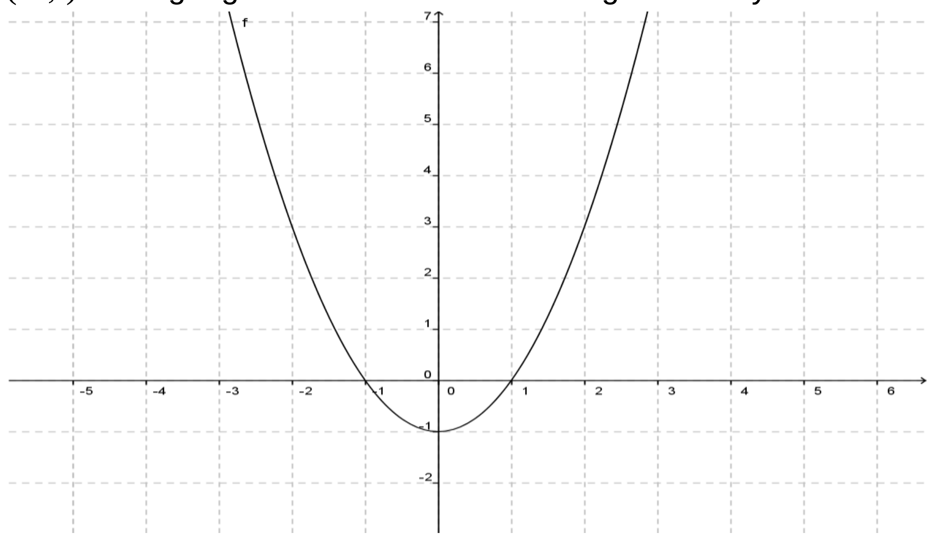
1.- Para resolver una desigualdad, cambiamos el signo de desigualdad por el de igualdad y la resolvemos.

2.- Con las soluciones de la igualdad formamos intervalos.
3.- Tomamos valores de prueba de cada intervalos y los sustituimos en la desigualdad, si un valor de prueba la satisface significa que el intervalo al que pertenece es solución de la desigualdad.
4.- La solución total será la unión de los intervalos que si cumplieron.

10ma sesión (2 horas)

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA SOLUCIÓN DE UNA DESGUALDAD

Partamos del siguiente problema, ¿Cuál es la solución de la desigualdad x^2-1>0?, casi de inmediato la mayoría responderá que $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. Y si hubiera sido x^2-1<0, los alumnos responderán $x \in (-1,1)$. Con geogebra vamos a elaborar la gráfica de y=x^2-1



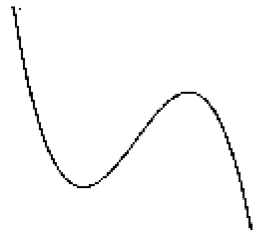
Preguntas para los alumnos:

a) ¿Para qué valores de x la gráfica de la función queda por arriba del eje x?, Después de un análisis, los jóvenes responden $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$.
b) Para que valores de x la gráfica queda por abajo del eje x?, Casi de inmediato responden que para $x \in (-1,1)$.
c) ¿Qué tiene que ver la pregunta del inciso a) con el problema x^2-1>0?
d) ¿Qué tiene que ver la pregunta del inciso a) con el problema x^2-1<0?

A partir de lo anterior se motiva a qué los alumnos den la siguiente interpretación de la solución de una desigualdad de la forma f(x)≥0, corresponde a los valores de x para los cuales la gráfica de f(x) queda por arriba del eje x. Y para f(x)≤0, corresponde a los valores de x para los cuales la gráfica de f(x) queda por abajo del eje x, más aún f(x)=0 significa hallar las intersecciones de la gráfica de f(x) con el eje x.
La interpretación geométrica de la solución de una desigualdad te permite a partir de la gráfica de la función involucrada conocer la solución sin tener que sustituir valores de prueba, basta saber donde intersecta la gráfica al eje x.

Ejercicio para los alumnos, con la orientación del profesor:

Resuelve la siguiente desigualdad: $-6x^3+19x^2-8x-5<0$
Preguntas: ¿Cómo se interpreta geométricamente la desigualdad? Respuesta esperada: Los valores de x para los cuales la gráfica está por abajo del eje x. ¿Cómo es la gráfica de f(x)= $-6x^3+19x^2-8x-5$? Respuesta esperada: por ser el coeficiente principal negativo y la potencia impar, será una silla decreciente.



Basta determinar las intersecciones con el eje x usando el teorema de las raíces racionales y la división sintética, la solución será $x \in (a,b) \cup (c,\infty)$ donde a, b y c son las tres raíces de menor a mayor, y que después de que los alumnos resuelven se obtiene que son -1/3, 1 y 5/2.

Desigualdades lineales

Comencemos mostrando las siguientes desigualdades:

a) 3<5
b) -5>-10

¿Qué pasa si la primera desigualdad se multiplica por 4? Respuesta esperada: se obtiene 12<20, pero si se multiplica por -2, ¿el sentido se conserva? Respuesta esperada: No, se debe invertir para que siga siendo válida.
En la segunda desigualdad que pasa si dividimos entre 2, la respuesta esperada es que se obtenga -5/2>-5, pero si se divide entre -5, se obtendrá 1<2
Conclusión: si una desigualdad de multiplica o divide por un número negativo, el sentido se debe invertir para que siga siendo válida.

Una desigualdad lineal es una expresión de la forma Ax+B<0 (el signo de la desigualdad puede variar), las desigualdades anteriores son las más sencillas de resolver, ya que se pueden despejar directamente.

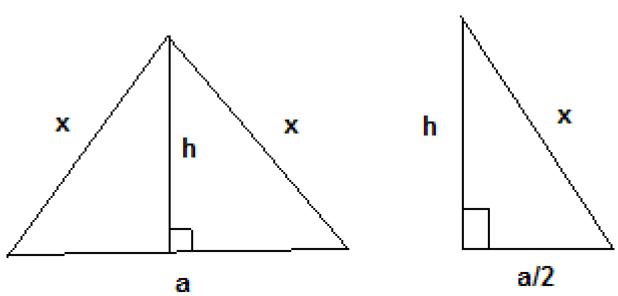
Tarea: Se recomienda dejar varias desigualdades

11va sesión (2horas)

5.- Introducción a las funciones con radicales

Vamos a comenzar con el estudio de un nuevo tipo de funciones que son las funciones con radicales, como su nombre lo indica, serán funciones que incluyen radicales. Vamos a motivar su estudio a través de los siguientes ejemplos:

1.-Si se tiene un triángulo isósceles en el que sus lados iguales miden x cm y el tercer lado mide una cantidad constante “a” ¿Se puede expresar la altura en función de los lados iguales?
Gracias a que los alumnos ya tienen más experiencia, se dan cuenta rápidamente que:

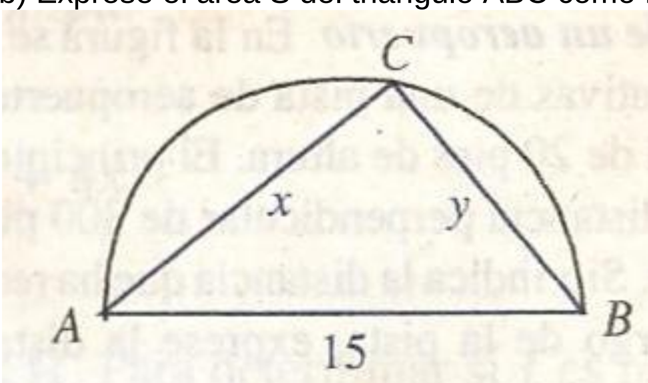


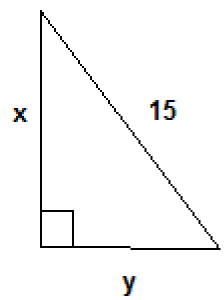
Por el Teorema de Pitágoras: $h^2=x^2+(a/2)^2$

Por lo tanto $h = \sqrt{x^2 + a^2/4}$

La mayoría de los alumnos logra hacer lo anterior sin mucha dificultad.
Se sugiere que se pida por ejemplo hallar el área de un triángulo isósceles, cuyos lados iguales x miden un cierto valor y cuyo lado constante "a" otro valor.
Pregunta para reflexionar:¿Habrá algún valor prohibido para x?.

2.- El triángulo ABC está inscrito en un semicírculo de 15 unidades de diámetro (véase la figura)
a) Si x representa la longitud del lado AC, exprese la longitud "y" del lado BC, como función de x. (El ángulo ACB es recto).
b) Exprese el área S del triángulo ABC como función de x, y defina el dominio de esta función.





Por ser triángulo rectángulo ya que la hipotenusa es el diámetro, se tiene aplicando el Teorema de
a) Pitágoras que $y = \sqrt{225 - x^2}$ ¿Habrá valores prohibidos para x?
b) Pregunta para los alumnos: ¿Cómo se determinar el área de un triángulo? Basta multiplicar la base "y" por la altura x: $A = \frac{1}{2} x \sqrt{225 - x^2}$, De esta expresión se puede ver que debido a que se tiene un radical de índice par, el radicando debe ser positivo es decir $225\text{-}x^2 \geq 0$, y que gracias a nuestra interpretación geométrica de la solución de una desigualdad se concluye que $x \in (-15,15)$, aquí es importante que los jóvenes interpreten el problema en términos del contexto, es decir, un lado de un triángulo no puede ser ni cero ni negativo, además, en el contexto del problema x puede valer 15? ¿Les parece claro que el área también la podemos expresar como $A = \sqrt{\frac{225x^2 - x^4}{4}}$?

6.- Desarrollo del tema de Funciones con radicales
Definición de función con radical

Como pudieron haber notado por los ejemplos anteriores una función con radical, es una expresión de la forma $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$ donde P(x) es un polinomio.

Pregunta para los alumnos: ¿Sólo existen raíces cuadradas?, respuesta esperada: No, puede haber raíces cúbicas, cuartas, etc.

Es decir en general puede haber raíces de índice par y raíces de índice impar.
¿Cuál es la diferencia? Respuesta esperada: Siempre se puede sacar raíz de índice impar a un número real, pero solo se pueden sacar raíces de de índice par de números positivos o cero.

¿Qué podemos decir entonces sobre si este tipo de funciones tendrá o no valores prohibidos?
La pregunta anterior es muy importante que se deje a los alumnos que la intenten resolver, se puede motivar la respuesta mediante preguntas como las siguientes:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+6}$ ¿Habrá valores prohibidos para x?
b) $f(x)=\sqrt[4]{x-5}$ ¿Habrá valores prohibidos para x?

Nos podemos esperar que los alumnos nos pregunten: Oiga maestro ¿Cómo sabemos si hay valores prohibidos?
Respuesta: Muy fácil, ya me lo habían dicho anteriormente, si el radical es de índice par, el radicando no puede ser negativo, ya que las raíces pares de números negativos no son reales, pero si el radical es de índice impar el radicando puede tomar cualquier valor y tendrá raíz real.

En conclusión podemos afirmar que:

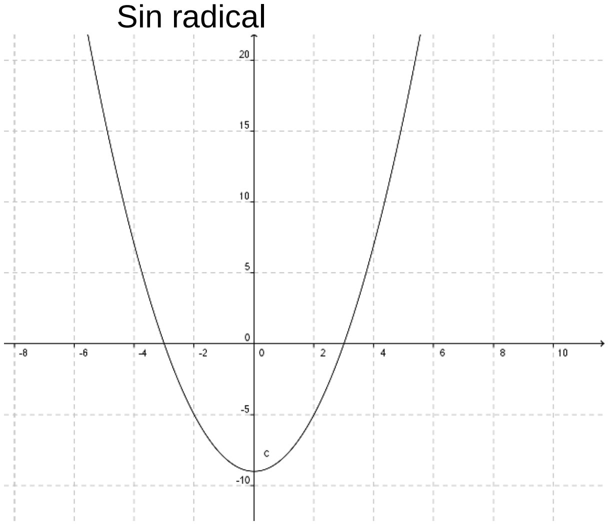
1) Si el radical es de índice impar y el radicando es un polinomio, no habrán valores prohibidos, es decir $x\in(-\infty,\infty)$
2) Si el radical es de índice par, es muy probable que haya valores prohibidos, en general todos aquellos que hagan que el radicando sea negativo, es decir, se deben excluir las regiones en las cuales la gráfica del radicando queda por abajo del eje x.

12va sesión 1 hora

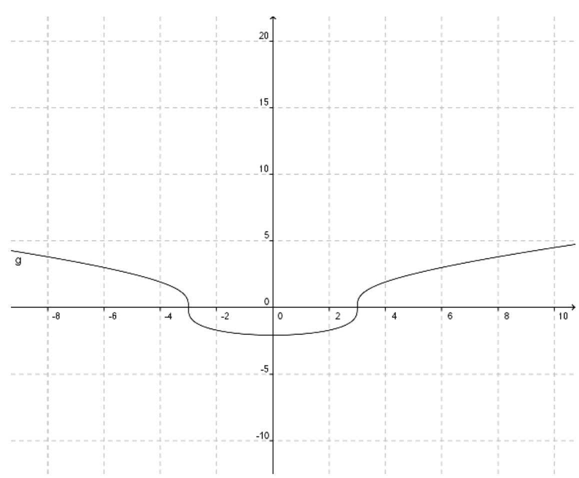
Vamos a mostrar un método muy sencillo para elaborar la gráfica de una función con radical basándonos en el hecho de que conocemos la gráfica del polinomio radicando.
Nos vamos a apoyar en el software geogebra. Vamos a elaborar la gráfica del radicando (que ustedes ya la saben hacer pues es un polinomio) y posteriormente vamos a elaborar la gráfica con el radical y observemos lo que le ocurre.

1.- Vamos a analizar la función $f(x)=\sqrt[3]{x^2-9}$, sabemos que el radicando es una parábola que abre hacia arriba e intersecta al eje x en -3 y 3 y al eje "y" en -9, es decir,

Sin radical

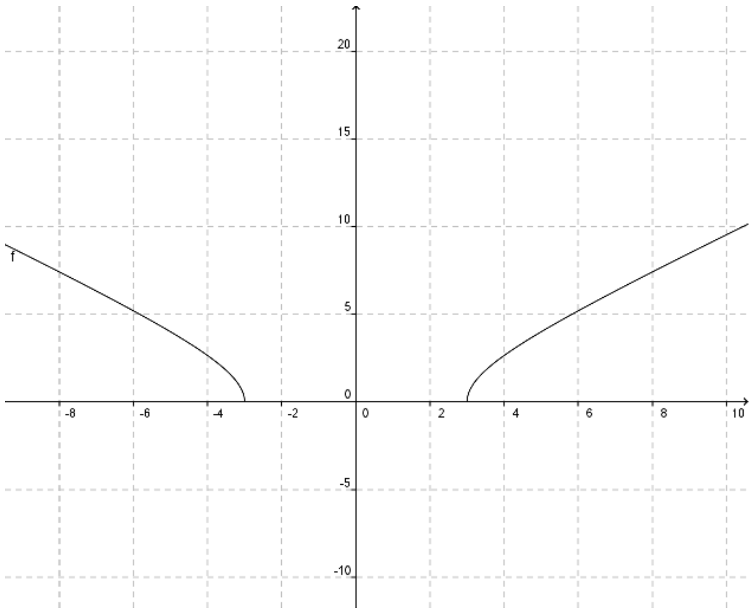


Con radical



Puede verse que la gráfica se comprimió, pero las intersecciones con el eje x no se modificaron, al igual que la ubicación de los máximos y mínimos. Hay que notar que el mínimo se comprimió debido a que su valor es mayor que 1 en valor absoluto y la raíz cúbica de un número mayor que 1 da un número menor que el original. No hubo valores prohibidos (no se le cortó nada a la gráfica)

Qué ocurriría si el radical hubiera sido de índice par: $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

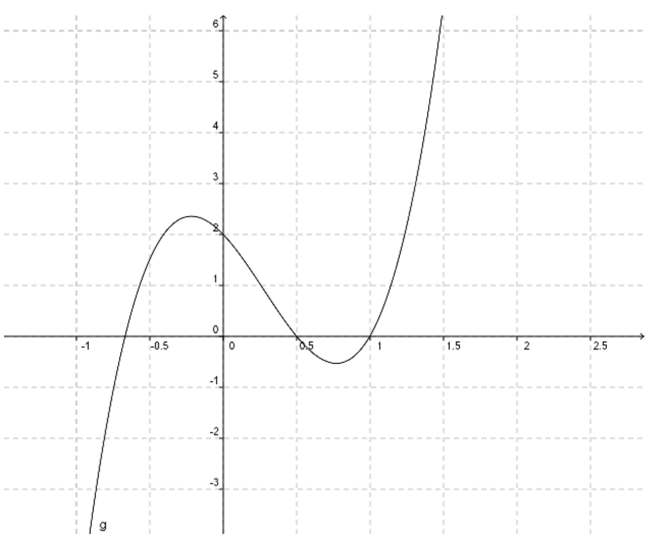


En este caso se le comprimió y se le cortó la parte de debajo de la gráfica del radicando, ya que es la genera las raíces de índice par de números negativos.

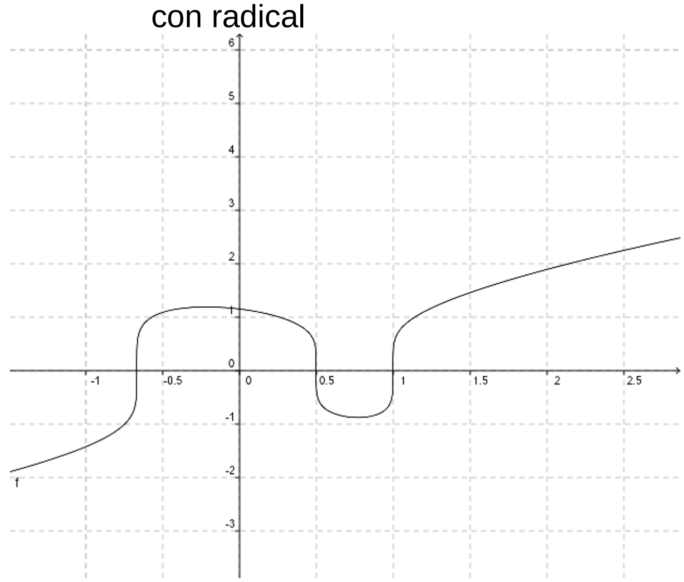
Vamos a analizar el siguiente ejemplo: $f(x)=\sqrt[5]{6x^3-5x^2-3x+2}$

Sabemos que el radicando es una silla creciente, que intersecta al eje x tres veces y si resolvemos la ecuación correspondiente obtenemos que las intersecciones están en 1, ½ y -2/3. De hecho aproximando el valor de los máximos y mínimos evaluando en el punto medio0 de 2 raíces consecutivas obtenemos que el máximo está aproximadamente a una altura de 2.35, y el mínimo a una altura aproximada de -0.53

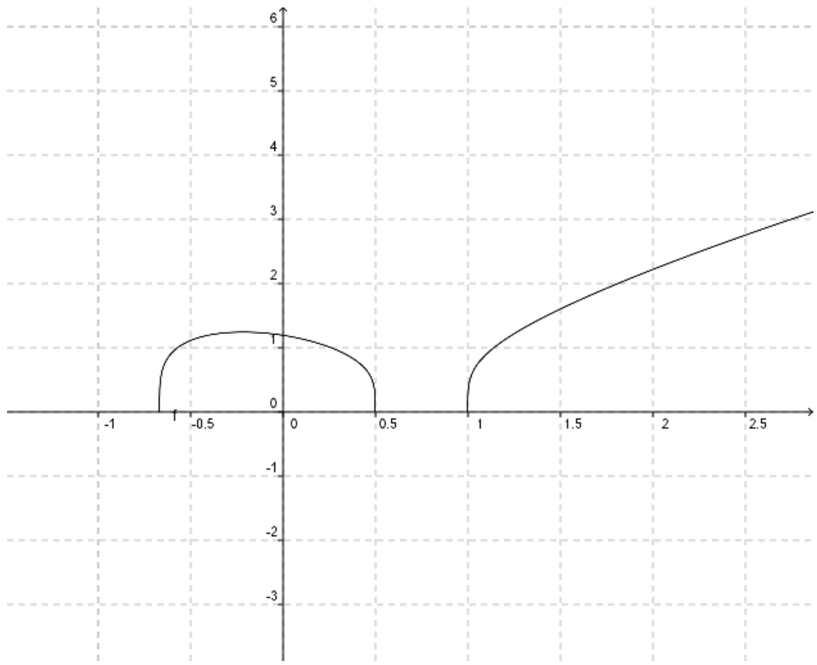
Sin radical



con radical



Y si el radical fuera de índice par: $f(x)=\sqrt[4]{6x^3-5x^2-3x+2}$



Es importante señalar que cuando el radical es de índice impar no le corta nada a la gráfica y comprime las regiones en donde el radicando es mayor que 1, pero expande las regiones en donde es menor 1, lo anterior se puede ver claramente en el máximo y mínimo de la función.

En el caso del índice par, se puede ver que le cortó al radicando las regiones en donde su gráfica está por abajo del eje x.

Podemos dar en general las siguientes conclusiones:

1.- Si el radical es de índice impar, el dominio no queda restringido y de hecho coincide con el dominio del polinomio radicando. La gráfica del polinomio radicando se comprime en las regiones donde es mayor que 1 y se expande en las que es menor que 1.
2.- Si el radical es de índice par, a la gráfica del radicando se le corta la región que está bajo el eje x y se comprime o expande dependiendo si mayor o menor que 1.
3.- Por la tanto podemos hacer la gráfica de una función con radical (sin tabular), teniendo en cuenta, los dos incisos anteriores y conociendo la gráfica del radicando.

Tarea: Analiza las siguientes funciones, elabora la gráfica sin tabular.

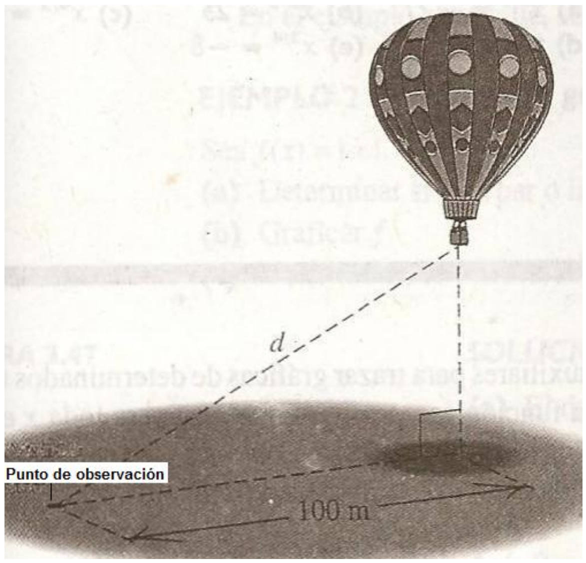
a) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-5x^2-9x+45}$
b) $f(x)=\sqrt[4]{9x^4-580x^2+256}$

7.-Problemas propuestos para examen

1.- Si se tiene un triángulo rectángulo cuya base (uno de sus catetos) es constante y tanto la altura (el otro cateto) como la hipotenusa son variables. ¿Se puede establecer una expresión para la altura en función de la longitud de la hipotenusa?

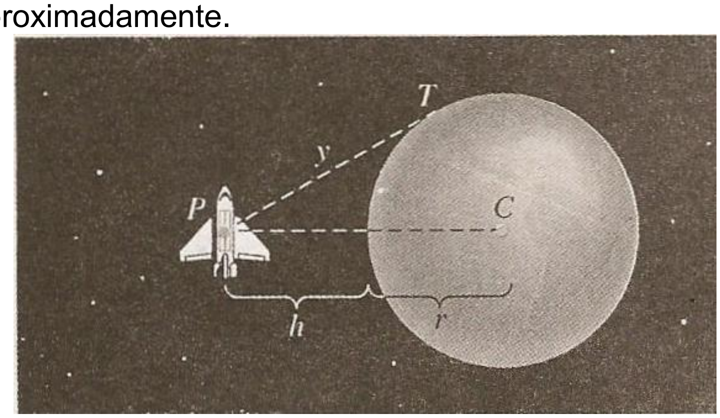
2.-Distancia a un globo de aire caliente

Un globo de aire caliente se suelta a la 1:00pm y se eleva verticalmente a una velocidad de 2m/s. Un punto de observación está ubicado a 100 m del punto de salida del globo (véase la figura). Si t representa el tiempo en segundos, después de la 1:00pm, exprese la distancia d, entre el globo y el punto de observación, como función de t.

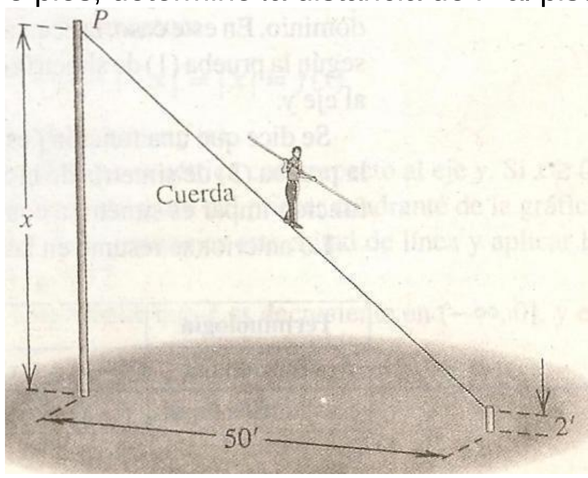


3.-Distancia a la Tierra.

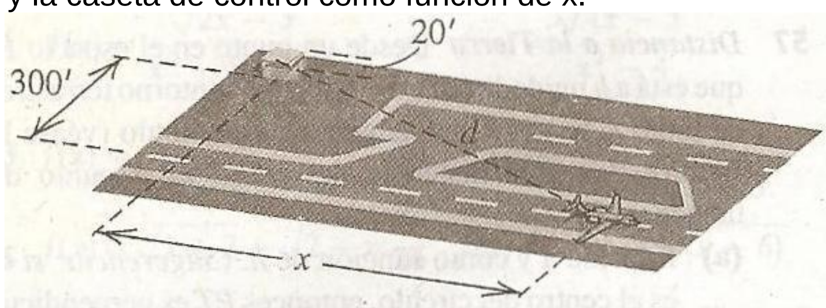
Desde un punto en el espacio P, que está a h unidades de un círculo (el contorno terrestre) de radio r, se traza una tangente a ese círculo (véase la figura). Sea “y” la distancia del punto P al punto de tangencia T.}
a) Exprese a “y” como función de h. (Si C es el centro del círculo, entonces PT es perpendicular a CT).
b) Si r es el radio de la Tierra, y h la altitud de un transbordador espacial, entonces “y” es la distancia máxima a la Tierra que puede ver un astronauta desde la nave. En particular si h=200mi y r=400mi calcule “y” aproximadamente.



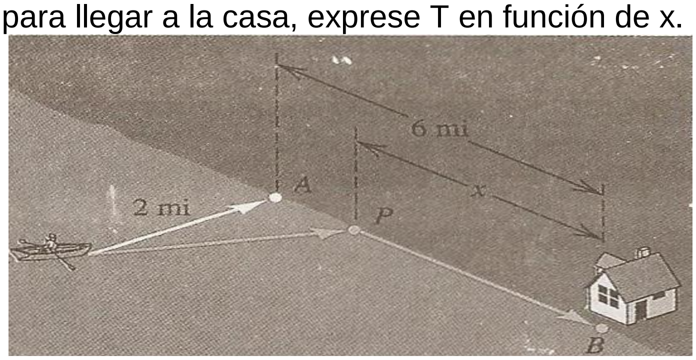
4.-Longitud de una cuerda tensa
La figura siguiente muestra un equilibrista en la cuerda tensa. Se clavan dos postes a 50 pies de distancia, pero el punto de fijación P de la cuerda, está por determinarse.
Exprese la longitud L de la cuerda, como función de la distancia x de P al piso.
Si el trayecto total debe ser 75 pies, determine la distancia de P al piso.



5.- Pista de un aeropuerto
En la figura se ven las posiciones relativas de una pista de aeropuerto y una torre de control de 20 pies de altura. El principio de la pista está a una distancia perpendicular de 300 pies de la base de la torre. Si x indica la distancia que ha recorrido un avión a lo largo de la pista, exprese la distancia d entre el aeroplano y la caseta de control como función de x.



6.- Hora de llegada
Una persona en un bote de remos que se encuentra a 2 millas del punto más cercano de la orilla A en la costa recta, desea llegar a una casa ubicada en un punto B, a 6 millas a lo largo de la costa (véase la figura).
Desea remar hacia un punto P, entre A y B, a x millas de la casa, para después caminar el resto de la distancia. Supóngase que puede remar a la velocidad de 3 mi/h, y caminar a 5 mi/h. Si T es el tiempo total necesario para llegar a la casa, exprese T en función de x.



7.- Se desea construir un edificio que tenga por base un triángulo isósceles, cuyos lados iguales miden 30 m, ¿cuánto deberá medir el tercer lado si queremos que su área sea la máxima posible? Aproximar el resultado.

8.- Conclusiones

Desde mi punto de vista creo que la unidad 2 del curso de Matemáticas IV es una de las más difíciles y debe ser tratada con sumo cuidado y paciencia, en particular lo más complicado para los alumnos es trazar la gráfica de una función racional. Considero que las estrategias que propuse pueden ser de suma utilidad para facilitar el análisis de la función racional. También considero que las estrategias que establecí para analizar funciones con radicales son sumamente efectivas, resaltando el hecho de la importancia de la unidad 1, ya que, el saber analizar polinomios, es crucial para el buen desarrollo de la unidad 2. Es muy importante hacer hincapié en que el objetivo del estudio de las funciones es el modelado, por lo que se deben implementar estrategias en las cuales el fin sea que los alumnos hagan modelos.

9.- Bibliografía empleada en este trabajo

1.- Barnett Raymond, et al. Álgebra, Mc Graw-Hill Interamericana, México, 2000.

2.- Kelly, Timothy J., Álgebra y Trigonometría, Precálculo, Editorial Trillas, México, 1996.

3.- Leithold, Louis. Matemáticas previas al cálculo: Análisis Funcional y Geometría Analítica, Harla, México, 1996.

4.- Rees, Paul K., Álgebra. Editorial Reverte, 1970.

5.- Swokowski, Earl w., Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2002

6.- Libro de Trabajo del profesor (rojo) para el curso de Matemáticas IV publicado por el CCH.