UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL SUR

IVÁN CARRILLO DÍAZ

DESARROLLO DEL TEMA CORRESPONDIENTE A LA UNIDAD 1 DEL CURSO DE MATEMÁTICAS III, ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

"SITEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 Y 3X3":

a) CON SOLUCIÓN ÚNICA.
b) CON INFINIDAD DE SOLUCIONES.
c) SIN SOLUCIONES.

22 DE NOVIEMBRE DE 2011.

ÍNDICE

APRENDIZAJES

El alumno:

- Reconoce cuándo un sistema de ecuaciones es lineal o no, y cuáles son sus incógnitas.
- Recuerda el método de reducción para resolver un sistema de ecuaciones 2x2, y comprende la forma en que se extiende a un sistema 3x3.
- Reafirma el concepto de sistemas equivalentes y entenderá que en los métodos algebraicos de resolución de un sistema de ecuaciones, se recurre a transformarlos a sistemas equivalentes de mayor simplicidad, hasta llegar a alguno que contiene una ecuación con una sola incógnita. Con ello, reafirma la estrategia matemática de convertir una situación desconocida o difícil, a otra conocida o más simple.
- Resuelve problemas que involucren sistemas de ecuaciones de los tipos estudiados en esta unidad, e interpreta el sentido de la solución hallada.

TEMÁTICA

- Sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3:
  a) Con solución única.
  b) Con infinidad de soluciones.
  c) Sin soluciones.

Propósito de la Unidad

En esta unidad se pretende ampliar el concepto de sistemas de ecuaciones y extender los procedimientos algebraicos de solución. Al mismo tiempo que reafirmar el significado algebraico y gráfico de solución de un sistema. También, se desea que el alumno adquiera práctica en la operatividad algebraica y que conozca una herramienta para el manejo del método analítico.

1.- DESARROLLO DEL TEMA: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2X2 Y 3X3

1.1.- Algunos antecedentes históricos

Desde tiempos remotos, y como parte esencial de su propio desarrollo evolutivo, el hombre ha procurado entender los diferentes aspectos que forman parte de su vida cotidiana. Para ello ha procurado disponer de herramientas que le permitan no sólo poder cazar y recolectar con mayor eficiencia, sino también poder medir longitudes, ordenar y contar objetos, o reconocer fenómenos periódicos de la naturaleza. Como parte de este proceso de elaboración, el hombre ha construido modelos que le han facilitado la tarea de resolver problemas concretos o que le han ayudado a encontrar una solución al problema específico que lo afecta. Todo esto con el propósito de favorecer tanto su forma de vida como la de los miembros de su comunidad. Muchos de estos problemas tienen un carácter lineal, es decir, pueden plantearse mediante algunas ecuaciones lineales con coeficientes en algún campo de números y con unas pocas variables o incógnitas. Recordemos que la palabra *ecuación* proviene del latín *aequatio* que significa *igualdad*. Así, una ecuación es una igualdad que contiene algunas cantidades desconocidas.

Los primeros rudimentos de lo que hoy conocemos como *Algebra lineal* se han encontrado en el documento matemático más antiguo que ha llegado hasta nuestros días: *el papiro Rhind*, conservado en el *British Museum* con algunos fragmentos en el *Brooklyn Museum*, y conocido también como *el Libro de Cálculo*, el cual fue escrito por el sacerdote egipcio Ahmés hacia el año 1650 a.C. y exhumado en Tebas en 1855. En este valioso documento se consideran las ecuaciones de primer grado, donde la incógnita aparece representada por un “ibis” que significa *escarbando en el suelo*, posiblemente por su primogénita aplicación a la agrimensura. Este documento contiene 85 problemas redactados en escritura hierática y fue concebido originalmente como un manual práctico para los no iniciados. Según el propio Ahmés, este texto es una copia de uno más antiguo (2000-1800 a.C.), algunos de cuyos documentos proceden quizá de periodos más antiguos.

Los babilonios sabían como resolver problemas concretos que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado, usando completación de cuadrados o sustitución, así como también ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales tales como:

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 \pm y^2 = b \end{cases}, \quad \begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} ax + y + cz = d \\ mx + ny + p = h \\ rx + sy + qz = 0 \end{cases}$$

Un ejemplo concreto de una tal situación ha llegado hasta nuestros días en una de las famosas *tablillas de Croquetta*, que datan del último período sumerio hacia el año 2100 a.C., es el siguiente problema:

“Existen dos campos cuyas áreas suman 1800 yardas cuadradas. Uno produce granos en razón de 2/3 de saco por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos en razón de 1/2 saco por yarda cuadrada. Si la producción total es de 1100 sacos, ¿cuál es el tamaño de cada campo?”

Por su parte, los matemáticos chinos durante los siglos III y IV a.C. continuaron la tradición de los babilonios y nos legaron los primeros métodos del pensamiento lineal. Por ejemplo, en el tratado *Nueve capitulos sobre el Arte Matemático*, publicado durante la Dinastia Han, aparece el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

así como un método para su resolución, conocido como la regla “fan-chen”, la cual, en esencia, es el conocido método de eliminación gaussiana de nuestros días. Es interesante recordar el problema que dio origen a este sistema lineal, el cual es similar al planteado por los babilonios:

“Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase?”

Esta obra *Nueve capitulos sobre el Arte Matemático* fue compuesta por el hombre de estado y científico Chuan Tsanom en el año 152 a.C. y en el se incluyeron sistemáticamente todos los conocimientos matemáticos de la época. Es oportuno recordar que esta obra fue consultada por Carl Friederich Gauss (1777-1855) en un estudio sobre la órbita del asteroide Pallas. Usando observaciones de Pallas, tomadas entre los años 1803 y 1809, Gauss obtiene un sistema de seis ecuaciones lineales en seis incógnitas y dá un método sistemático para resolver tales ecuaciones, hoy día conocido como *eliminación gaussiana*.

Luego vendrían los aportes de los matemáticos islámicos y europeos, quienes siguieron cultivando el pensamiento lineal. Por ejemplo, Leonardo de Pisa (1180-1250), mejor conocido como Fibonacci, en su obra *Liber Quadratorum* publicada en 1225, estudió el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x^2 + a = y^2 \\ x^2 - a = z^2 \end{cases}$$

el cual es una generalización de un problema que le había propuesto Giovanni da Palermo (con a = 5).

Los matemáticos griegos, por su parte, no se preocuparon por los problemas lineales, a pesar de poseer un reconocido pensamiento lineal en sus consideraciones geométricas de origen pitagórico y de reminiscencias babilónias. No obstante, en sus trabajos se aprecian algunas tentativas del análisis diofántico, especialmente en el estudio de las magnitudes y las propiedades aritméticas de los números enteros. No olvidemos que la solución general de la ecuación de segundo grado aparece en *los Elementos de Euclides*.

1.2.- ECUACIONES LINEALES

Una *ecuación lineal* es una ecuación de la forma

$$\mathrm{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots .. + a_nx_n = b}$$

donde $a_1,a_2,..,a_n$ son los coeficientes, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ las variables o incógnitas y b el término constante.

Por ejemplo la ecuación 3x-6y+9z=7 es una ecuación lineal con tres variables, sin embargo la ecuación 6x+8yz+9w=4 no es una ecuación lineal, ya que la multiplicación de variables es de segundo grado.

Algebraicamente la solución de una ecuación de la forma $a_1x_1+a_2x_2+\cdots..+a_nx_n=b$ es un conjunto de valores k_1, $k_2,\ldots k_n$, tales que si se sustituyen en la ecuación en vez de las variables, ésta es verdadera, es decir, si $x_1=k_1$, $x_2=k_2,\ldots,x_n=k_n$ entonces $a_1k_1+a_2k_2+\cdots..+a_nk_n=b$ es verdadera.

1.2.1.- Ecuación lineal con una variable.

Sea la ecuación lineal de la forma ax=b, se pueden presentar tres casos en lo que se refiere a su solución:

a) Si a≠0, entonces dividiendo entre "a" ambos miembros de ax=b, se tiene que x=b/a, la cual es solución única.
   La ecuación 4x-1=x+6 tiene por solución x=7/3

b) Si a=0 y b≠0 se tiene al sustituir en la ecuación, que 0x=b, es decir 0=b, esta es una ecuación falsa e implica que no tiene solución.
   La ecuación 2x-5-x=x+3 no tiene solución.

c) Si a=0 y b=0 se tiene al sustituir que 0x=0, es decir, 0=0, la cual es una expresión siempre válida para cualquier x, por lo tanto la ecuación tiene infinitas soluciones.
   La ecuación 4+x-3=2x+1 tiene infinitas soluciones.

1.2.2.- Ecuaciones lineales degeneradas

Se dice que una ecuación lineal es degenerada si tiene la forma
$$0x_1+0x_2+\cdots..+0x_n=b$$

Es decir, cuando todos los coeficientes de la ecuación son cero.

Se pueden presentar dos casos:

a) Que b≠0, para tal caso la ecuación no tiene solución ya que ninguna n-ada de números $(k_1,k_2,..,k_n)$ hace que la ecuación sea verdadera.

b) Que b=0, en este caso la ecuación tiene infinitas soluciones pues para cualquier n-ada de números $(k_1,k_2,..,k_n)$ la ecuación es verdadera.

1.2.3.- Ecuaciones lineales no degeneradas

Se dice que una ecuación lineal es no degenerada si tiene la forma
$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots..+a_nx_n=b$$

En donde al menos un a_i≠0.

Por ejemplo, las siguientes ecuaciones lineales son no degeneradas: 3x=5; x+y=4; 7x-5y+8z=6.

1.2.4.- Primera incógnita de una ecuación lineal

Se dice que x_p es primera incógnita en la ecuación
$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots..+a_nx_n=b$$

Si $a_i=0$, $\forall i<p$ con $a_p\neq0$.

Lo anterior significa que la primera incógnita de una ecuación lineal, será la primera que tenga coeficiente diferente de cero.

Supongamos que tenemos ecuaciones con tres variables:

a) 0x+7y+8z=6 La primera incógnita es y.
b) 0x+0y-5z=-7 La primera incónita es z.
c) 0x-6y+0z-9w=4 La primera incógnita es y.

El siguiente *Teorema* nos da un método general para determinar la solución general de una ecuación lineal no degenerada:

"Sea una ecuación lineal no degenerada de la forma $\mathrm{a}_1\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{b}$ (1)

donde x_p es primera incógnita, la solución general se obtiene al asignar valores arbitrarios a las variables libres, es decir a aquellas que no son primera incógnita".

Demostración:

Si x_p es primera incógnita, entonces $a_i=0$, $\forall i<p$ con $a_p \neq 0$, entonces la ecuación (1) se reduce a $\mathrm{a}_\mathrm{p}\mathrm{x}_\mathrm{p} + \cdots + \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1}\mathrm{x}_{\mathrm{n}-1} + \mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{b}$, (2)
si asignamos valores arbitrarios a las variables libres, es decir, a las x_i para i>p:

$X_{p+1}=k_{p+1}$, $X_{p+2}=k_{p+2}$,. . ., $x_n=k_n$

Sustituyendo en (2) y despejando x_p se tiene que

$$x_p = \frac{b - a_{p+1}k_{p+1} - a_{p+2}k_{p+2} - \cdots - a_n k_n}{a_p}$$

Por lo tanto la solución general es el conjunto ordenado de números

$$\left(\frac{b - a_{p+1}k_{p+1} - a_{p+2}k_{p+2} - \cdots - a_n k_n}{a_p}, k_{p+1}, k_{p+2}, \ldots, k_n\right)$$

El teorema implica que una ecuación lineal no degenerada con más de un variable tiene infinitas soluciones pues podemos asignar infinitos valores a las variables libres.

Ejemplo: Vamos a encontrar una solución particular y la general de la siguiente ecuación: -2x+8y+3z=9.

Asignamos valores a las variables libres "y" y "z" y despejamos x.

Sea y=1, z=3 se tiene que -2x+8(1)+3(3)=9, simplificando, -2x=-8, es decir, x=4, la solución particular es (4,1,3).

La general, si damos y=a, z=b y despejamos x, tenemos x=(9-8a-3b)/-2.

Por l tanto $\left(\frac{9-8a-3b}{-2}, a, b\right)$ es la solución general.

En el caso particular de una ecuación lineal no degenerada con dos variables $a_1x_1+a_2x_2=b$, se tiene que la representación gráfica la constituye una línea recta en el plano cartesiano y la solución consiste de todas las parejas ordenas (k_1,k_2) que pertenecen a la recta.

Si la ecuación tiene 3 variables $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$, la interpretación geométrica de la solución la constituyen todos los puntos (k_1,k_2,k_3) que pertenecen al plano definido por la ecuación.

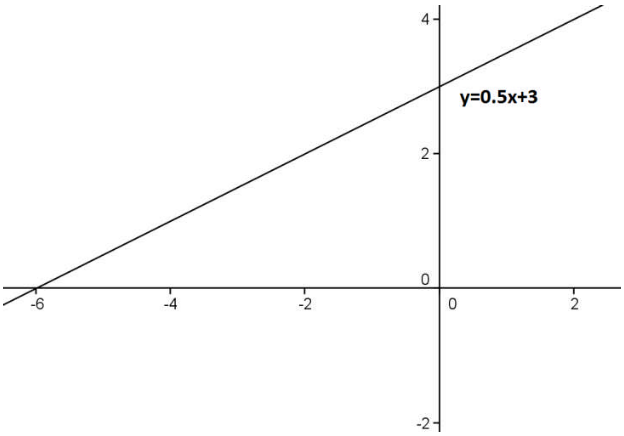


Figura 1.- Gráfica de una ecuación lineal con dos variables.

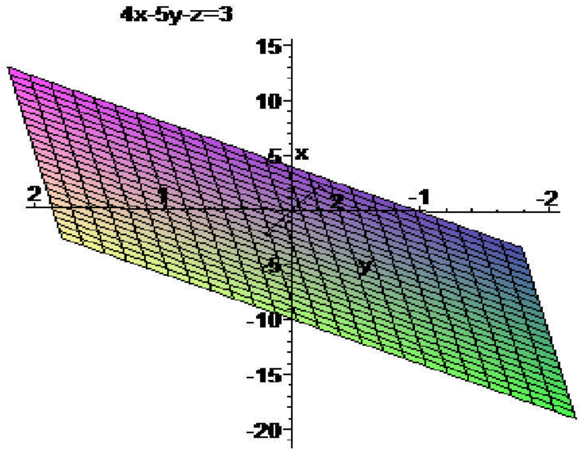


Figura 2.- Gráfica de una ecuación lineal con tres variables

1.3.- Sistemas de ecuaciones lineales.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\mathbf{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1}$$

$$\mathbf{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r}$$

Es decir se trata de un conjunto de “r” ecuaciones con “n” incógnitas, se pueden presentar dos casos:

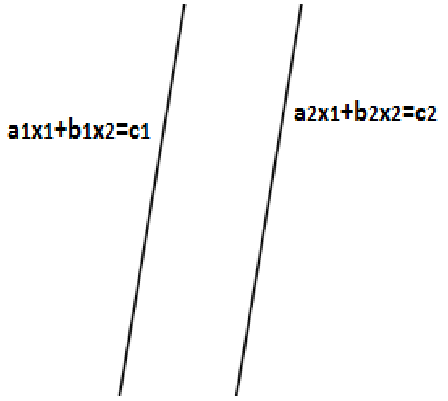
a) r=n, es decir, el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
b) n>r, es decir, más incógnitas que ecuaciones.

Algebraicamente la solución de un sistema de ecuaciones es un conjunto de “n” valores $x_1=k_1$, $x_2=k_2,\ldots,x_n=k_n$ que satifacen todas y cada una de las ecuaciones al mismo tiempo. Geométricamente la solución está asociada con los puntos de intersección de las gráficas de cada una de las ecuaciones. Solo se pueden graficar ecuaciones hasta de tres variables.

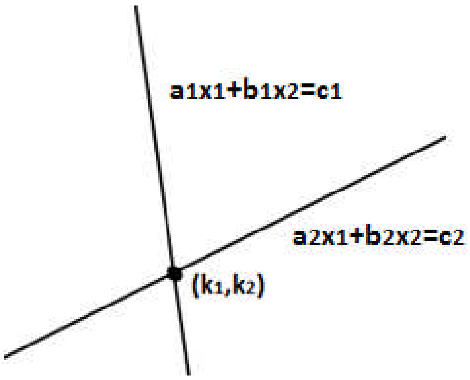
Si pensamos con un enfoque geométrico para el casos de los sistemas de 2X2 y 3X3, podemos pensar en los siguientes casos:

Para 2X2

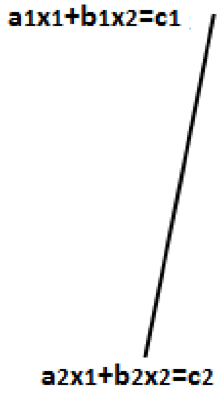
a) Rectas Paralelas (sin solución)



b) Rectas no paralelas (solución única)

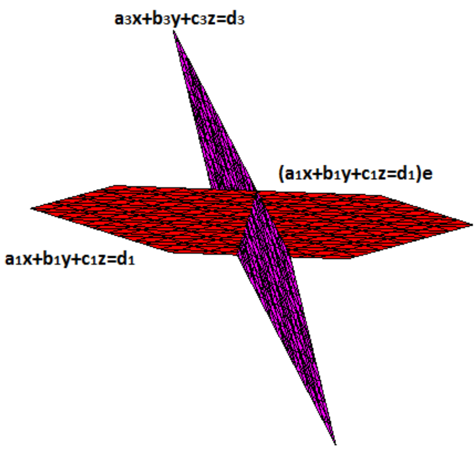


c) Rectas Múltiplos (infinitas soluciones)

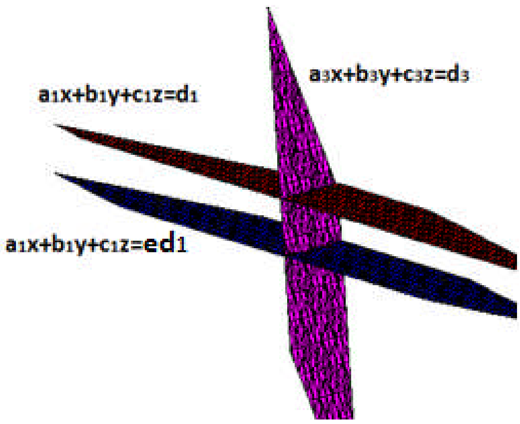


Para 3X3

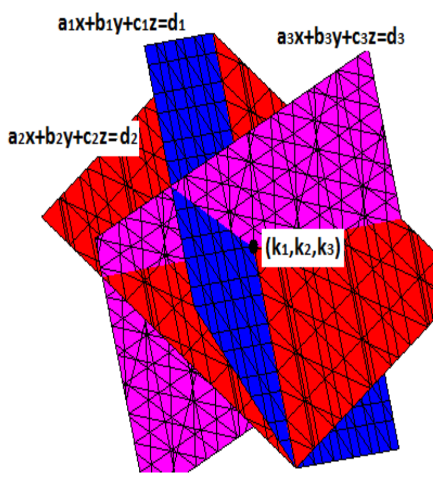
a) Dos planos múltiplos y uno no (infinitas solucines)



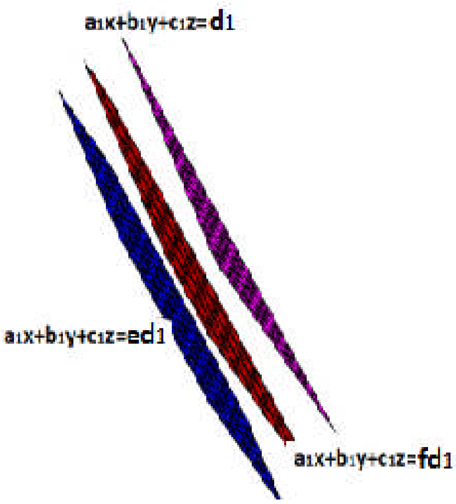
b) Dos planos paralelos y uno no (sin solución)



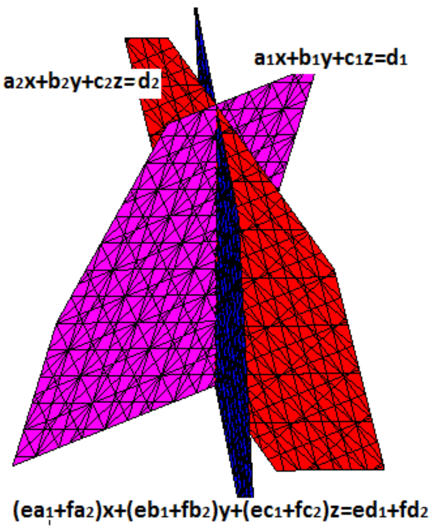
c)Tres planos no paralelos (solución única)



d)Tres planos paralelos (sin solución)



e) Un plano combinación lineal de los otros dos (infinitas soluciones)



Si se dispone de un programa graficador como geogebra (para sistemas de 2X2) y maple para sistemas de (3X3) se puede identificar fácilmente en que caso se está.

Si se emplea algún método analítico como los de reducción: suma y resta, sustitución, igualación, eliminación Gaussiana o Gauss-Jordan, para resolver el sistema, nos podemos dar cuenta en que caso estamos:

a) Si al resolver aparece una ecuación degenereada de constante no nula, es decir,
$$0x_1 + 0x_2 + \cdots .. + 0x_n = b$$
Con b≠0, el sistema no tiene solución.
b) Si al resolver aparece una ecuación degenereada de constante nula, es decir,
$$0x_1 + 0x_2 + \cdots .. + 0x_n = b$$
Con b=0, el sistema tiene infinitas soluciones.
c) Si al resolver el sistema solo aparecen ecuaciones no degeneradas es decir de la forma
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots .. + a_nx_n = b$$

En donde al menos un $a_i \neq 0$, se concluye que el sistema tendrá solución única.

2.- IMPLEMENTACIÓN EN EL SALÓN DE CLASE (5 horas)

2.1.- 1ra sesión (2 horas): *Se espera que los alumnos recuerden el método de suma y resta y sustitución, así como identifiquen a un sistema lineal y a uno no lineal.*
Vamos a introducir el tema con algunas situaciones que dan lugar a los sistemas de ecuaciones.

Comentario del profesor: En esta unidad vamos a generalizar las técnicas vistas en matemáticas I para resolver sistemas de ecuaciones lineales y también veremos algunos sistemas no lineales.

Vamos a poner tres problemas, el objetivo es que los alumnos sean capaces de plantear los sistemas de ecuaciones que los definen y den la solución al que involucra un sistema lineal de 2X2.

Problemas tan amplios como la distribución de cosechas o el presupuesto de un país, el cálculo de la órbita de un asteroide (o de un planeta) y el cálculo de la estabilidad estructural de un edificio en ingeniería civil, entre muchos otros, pueden plantearse en términos de sistemas de ecuaciones lineales para obtener su solución.

Actividad para los alumnos (individual o en equipos de 2):

1.- Una cadena de supermercados en México vende carne molida del tipo popular y selecta. Un lote de molida popular contiene 3 kg de grasa y 17 kg de carne roja, un lote de molida selecta contiene 2 kg de grasa y 18 kg de carne roja. Si en un momento dado cuenta con 10 kg de grasa y 90 kg de carne roja. ¿Cuántos lotes de molida popular y de selecta pueden producir utilizando toda la carne y toda la grasa sin desperdiciar nada?

2.- Encuéntrese las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diagonal mide 17cm y la diferencia de sus lados es 7cm.

3.- Una organización agrupa a sus asociados en tres categorías; blancos, azules y amarillos. El total de asociados es 285. El número combinado de amarillos y azules es mayor en 15 unidades que el doble del número de blancos. El número combinado de blancos y azules es mayor en 45 unidades que el triple del número de amarillos. Determínese el número de miembros que pertenecen a cada categoría.

Observación: *Es importante recordarles a los alumnos que para poder construir las ecuaciones que representan a un problema no hay receta, lo deben leer bien y entender, identificar las cantidades desconocidas, a veces resulta conveniente llamar a las variables como las cantidades desconocidas y finalmente plantear las ecuaciones en base a las condiciones que se establecen para las cantidades desconocidas.*

Después de dar un tiempo razonable de alrededor de 15 minutos, el profesor y los alumnos discuten los resultados obtenidos, se debe valorar con participaciones a los alumnos que resuelvan o aporten ideas importantes. No es de sorprenderse que algunos alumnos hayan encontrado incluso la solución de los problemas sin plantear ecuaciones, es importante recordarles que el objetivo es que sean capacen de construir modelos algebraicos y resolver las ecuaciones resultantes, así que deben intentar construir las ecuaciones.

Se espera que la mayoría de los alumnos hayan llegado a los siguientes sistemas:

1.- $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 17x + 18y = 90 \end{cases}$ 2.- $\begin{cases} x^2 + y^2 = (17)^2 \\ x - y = 7 \end{cases}$ 3.- $\begin{cases} x + y + z = 285 \\ z + y - 15 = 2x \\ x + y - 45 = 3z \end{cases}$

“x”: número de lotes de poular
“y”: número de lotes de selecta

sea “x” el largo
sea “y” el largo

sea “x” el número de blancos
sea”y” el número de azules
sea “z” el número de amarillos

Con relación al sistema 1) es muy probable que la mayoría de los alumnos lo hayan resuelto por algún método visto en matemáticas I.

En este punto el profesor debe motivar a los alumnos a que traten de dar una definición sobre sistema lineal y no lineal a partir de las estructuras de los tres sistemas. Además es importante recordarles la interpretación geométrica de la solución.

Se espera que los alumnos obtengan algo del estilo:

a)Un sistema lineal es aquel que tiene solo ecuaciones que son sumas de variables elevadas a la potencia 1, como los de los ejercicios 1 y 3.

b)Un sistema no lineal es aquel que tiene alguna ecuación en donde las variables están elevadas a una potencia mayor que 1, o donde se multiplican las variables, o aparecen como denominador o bajo un radical, como el del ejercicio 2.

Es importante que el profesor de la definición adecuada al final de la discusión y que resuelva junto con los alumnos el sistema del ejemplo 1) tanto por el método de suma y resta así como por el de sustitución para que los alumnos los recuerden.

En este punto se debe pedir a los alumnos que grafiquen cada ecuación de ejemplo 1, para que comprueben que la solución corresponde al punto de intersección. Sería importante darles una ayuda pidiéndoles que en cada ecuación despejen la “y” y que tabulen dos puntos para cada ecuación.

A continuación el profesor pide a los alumnos que traten de generalizar lo aplicado al ejemplo 1 para resolver el 3, con la siguiente idea:

“Como pudieron haber notado la idea al resolver el ejemplo 1, por los métodos de suma y resta y por sustitución, fue reducir el sistema, es decir, pasar de dos ecuaciones con dos incógnitas a una ecuación con una incógnita”.

El método de suma y resta lo logra sumando adecuadamente las ecuaciones y el de sustitución despejando de una ecuación y sustituyendo el despeje en la otra.

Pregunta del profesor hacia los alumnos: ¿Cuál será la idea al resolver por suma y resta y sustitución un sistema de 3X3?

Respuesta esperada: Pasar de un sistema de 3X3 a uno de 2X2. Por el método de suma y resta en primer lugar se ordena y luego se escoge una variable y se elimina al sumar adecuadamente dos ecuaciones, posteriormente se toman las otras dos ecuaciones y se suman entre sí para eliminar la misma variable, con ello se logra la reducción.

Por el método de sustitución despejar una variable de una ecuación y sustituirla en las otras dos, con ello se logra la reducción.

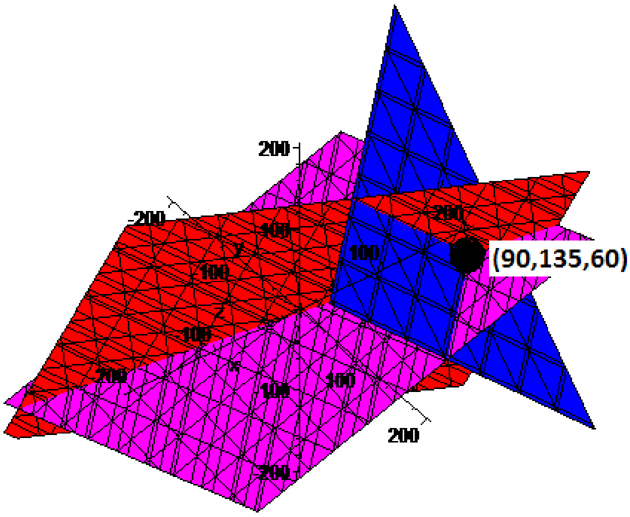
Actividad para los alumnos (individual o en equipos de 2):

Resuelvan por suma y resta y por sustitución el sistema del ejemplo 3, es decir:

$$\begin{cases} x + y + z = 285 \\ z + y - 15 = 2x \\ x + y - 45 = 3z \end{cases}$$

Observación: Después de un tiempo razonable de entre 10 y 15 minutos, sería importante que los alumnos que resolvieron adecuadamente el sistema pasaran al pizarrón a explicar sus procedimientos, estanto el profesor pendiente para aclarar dudas que surgan.

Es muy probable que algunos alumnos pregunten por la gráfica de cada ecuación, se les debe aclarar que en este caso no se graficaran ya que no son líneas rectas sino planos (en 3 dimensiones) es muy importante usar por ejemplo el progrma maple y mostráles la gráfica.



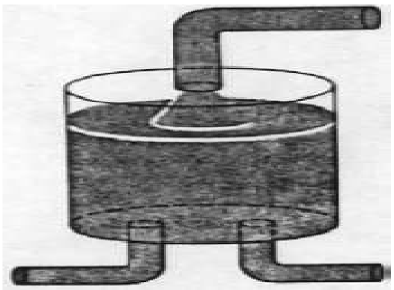
También algunos alumnos preguntarán por el sistema no lineal del ejemplo 2, se debe señalar que los sistemas no lineales se tratarán un poco más adelante ya que en general no todos los métodos que se usan para resolver los sistemas lineales son aplicables. (dar pauta a que lo intenten resolver para la siguiente clase)

Para finalizar la clase es importante que se deje una pequeña tarea de dos problemas (uno de 2X2 y otro de 3X3), para que los alumnos los resuelvan por el método de suma y resta y sustitución. Así como pedirles que hagan una breve investigación sobre historia de los sistemas de ecuaciones y que si alguien quiere exponer que lo haga.

También es importante que el profesor plantee la siguiente pregunta *"¿creen ustedes que todos los sistemas lineales tienen solución?"*

TAREA: *Resuelve tanto por suma y resta como por sustitución los siguientes problemas.*

a) Para llenar un tanque de almacenamiento de agua de 300 litros se emplea un tubo único de entrada; para proveer de agua de riego a los campos de los alrededores se pueden utilizar dos tubos idénticos de salida (ver figura). Se necesitan 5 horas para llenar el tanque, cuando los dos tubos de salida están abiertos. Cuando uno de ellos se encuentra cerrado, solo toma 3 horas el llenado del tanque. Encuentra los flujos (en litros por hora) de entrada y salida del tanque.



b) Un químico tiene tres soluciones que contienen un 10%, 30% y 50%, respectivamente,de cierto ácido; desea mezclar las tres soluciones, usando el doble de la solución al 50% respecto a la de 30%, para obtener 50 litros de una solución que contenga un 32% del ácido. ¿Cuántos litros de cada solución deberá usar?

2.2.- 2da sesión (2 horas): *Se espera que los alumnos usen los métodos de suma y resta y sustitución para identificar cuando un sistema de ecuaciones de 2x2 tiene una solución única, una infinidad y no tiene solución.*

Esta sesión la vamos a iniciar revisando los problemas de tarea y dando un tiempo a que algunos alumnos expongan aspectos históricos sobre los sistemas de ecuaciones.

Es importante que los propios alumnos pasen al pizarrón a exponer como resolvieron sus problemas.

Pregunta del profesor hacia los alumnos: Como lo planteamos en la sesión anterior, ¿creen ustedes que todos los sistemas de ecuaciones tienen siempre solución?

Posible respuesta de los alumnos: "Si pensamos que estamos encontrando puntos de intersección de gráficas, no habrá solución si las gráficas no se intersectan. Pero tenemos que hacer la gráfica para verlo".

Comentario del profesor: Muy buena respuesta pero vamos a aprender como contestar lo anterior de manera algebraica y no gráfica.

Actividad para los alumnos: *(individual o en equipos de 2) pero guiada por el profesor. Esta actividad tiene por objetivo que los alumnos descubran por sí mismos cuando un sistema de ecuaciones lineales de 2X2 y 3X3 tendrá solución única, una infinidad de soluciones o no tendrá solución, para ello vamos a resolver algunas ecuaciones lineales y algunos sistemas de ecuaciones. Se recomienda dar un tiempo razonable a cada uno de los ejercicios, que un alumno pase al pizarrón y analizarlos entre todos para sacar conclusiones.*

Ejercicios:

1.- Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones.

a) **6x-3(x+2)=x+5**

b) **3x-4-x=2x+3**

c) **7+2x-4=3x+3-x**

d) **2x-y+4=x-5(y+1), Elabora la gráfica.**

e) **2x+y+x-5=2y+3x-y+4**

f) **2y+3x-y+4=x+3+y+1+2x**

2.- Resuelve por el método que se indica cada sistema y elabora la gráfica en cada caso.

g) $\begin{cases} 2x+2y=6 & (1) \\ x+y=1 & (2) \end{cases}$ **Sustitución**

h) $\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ 3x+3y=3 & (2) \end{cases}$ **Suma y resta**

i) $\begin{cases} x+2y=3 & (1) \\ x-y=-3 & (2) \end{cases}$ **Suma y resta**

3.- Resuelve por el método que se indica cada sistema y pide al profesor que te muestre la gráfica.

j) $\begin{cases} x+2y-4z=-4 & (1) \\ 5x+11y-21z=-22 & (2) \\ 3x-2y+3z=11 & (3) \end{cases}$ **Sustitución**

k) $\begin{cases} \mathrm{x}+2\mathrm{y}-3\mathrm{z}=1 & (1) \\ 2\mathrm{x}+5\mathrm{y}-8\mathrm{z}=4 & (2) \\ 3\mathrm{x}+8\mathrm{y}-13\mathrm{z}=7 & (3) \end{cases}$ **Suma y resta**

l) $\begin{cases} x+2y-3z=1 & (1) \\ 3x-y+2z=7 & (2) \\ 5x+3y-4z=2 & (3) \end{cases}$ **Sustitución**

Análisis en clase de la solución de cada ejercicio.

a) $6x-3(x+2)=x+5$

Solución: Dada por el alumno

Simplificando se tiene $6x-3x-6=x+5$

$3x-6=x+5$

Restando x de ambos lados $3x-x-6=x-x+5$

Sumando 6 de ambos lados $2x-6+6=5+6$

$2x=11$

Dividiendo entre 2 $2x/2=11/2$

$x=11/2$

Conclusión grupal: Al analizar esta ecuación podemos concluir que tiene una solución única ya que la ecuación se reduce a la forma $2x=11$, que tiene por única solución $x=11/2$.

b) $3x-4-x=2x+3$

Solución: Dada por un alumno

Simplificando se tiene $2x-4=2x+3$

$0x=7$

Conclusión grupal: Al analizar esta ecuación podemos concluir que ningún número real la puede satisfacer, por lo tanto no tiene solución.

Observación del profesor: Una ecuación de la forma $0x=7$ recibe el nombre de ecuación degenerada de constante no nula y no tiene solución.

c) $7+2x-4=3x+3-x$

Solución: Dada por un alumno

Simplificando se tiene $2x+3=2x+3$

$0x=0$

Conclusión grupal: Al analizar esta ecuación podemos concluir que la variable x puede tomar cualquier valor real y satisfacer la ecuación.

Observación del profesor: Una ecuación de la forma $0x=0$ recibe el nombre de ecuación degenerada de constante nula y tiene infinitas soluciones.

d) $2x-y+4=x-5(y+1)$

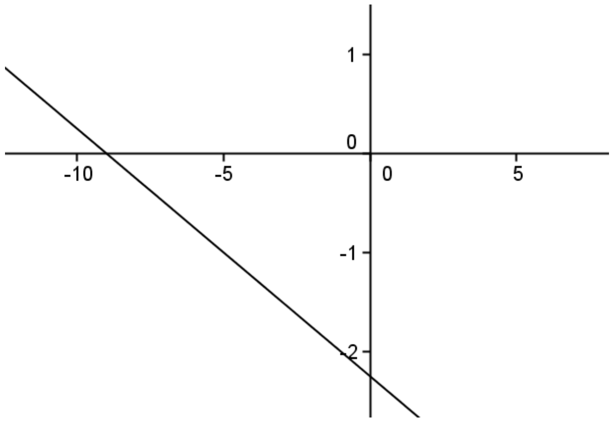
Solución: Dada por un alumno

Simplificando se tiene $2x-y+4=x-5y-5$

$x+4y=-9$

Una solución es $(-1,-2)$, otras son $(3,-3)$, $(0, -9/4)$ tiene muchas.

Conclusión grupal: Al analizar esta ecuación podemos concluir que todos los puntos que pertenecen a la recta $x+4y=-9$ satisfacen la ecuación.



Observación del profesor: Una ecuación de la forma ax+by=c (con a y b≠0) recibe el nombre de ecuación no degenerada y todos los puntos pertenecientes a su gráfica son solución. Para resolverla se puede despejar una variable y darle valores a la otra para obtener puntos (x,y) que sean solución

e) 2x+y+x-5=2y+3x-y+4

Solución: Dada por un alumno

Simplificando se tiene 3x+y-5=y+3x+4
0x+0y=9

Conclusión grupal: Es una ecuación degenerada de constante no nula, por lo tanto concluimos que la ecuación no tiene solución.

f) 2y+3x-y+4=x+3+y+1+2x

Solución: Dada por un alumno

Simplificando se tiene y+3x+4=3x+y+4
0x+0y=0

Conclusión grupal: Es una ecuación degenerada de constante nula, por lo tanto concluimos que la ecuación se satisface para cualquier pareja (x,y).

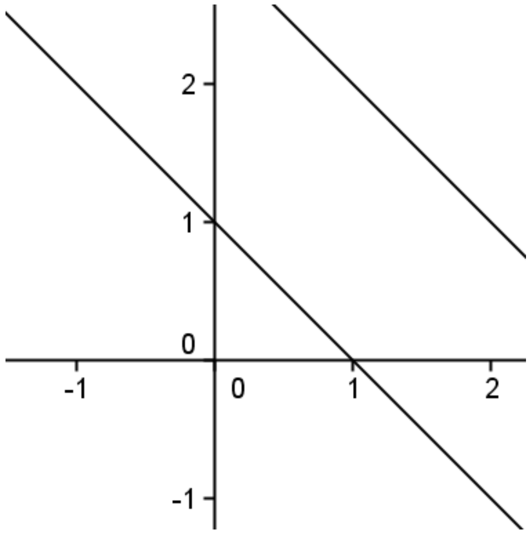
Observación del profesor: Es importante que distingan entre la solución de una ecuación degenerada de la forma 0x+0y=0 y una no degenerada de la forma ax+by=c si bien ambas tienen infinitas soluciones, en el primer caso puede ser cualquier pareja (x,y) y en el segundo solamente aquellas que pertenezcan a la gráfica de la recta.

g) $$\begin{cases} 2x + 2y = 6 & (1) \\ x + y = 1 & (2) \end{cases}$$

Solución: Por el método de sustitución, dada por un alumno.
Despejando x de la ecuación (2) y sustituyendo en la (1)
x=1-y (3)
2(1-y)+2y=6
Simplificando
2-2y+2y=6
0y+2=6
0y=6-2
0y=4

Se tiene una ecuación degenerada de constante no nula, por lo tanto el sistema no tiene solución.

Al graficar notamos que las rectas son paralelas y por lo tanto no hay punto de intersección.



Conclusión grupal: Si al resolver un sistema de 2x2 lineal se obtiene una ecuación degenerada de constante no nula, implica que gráficamente tenemos dos líneas paralelas y por lo tanto el sistema no tiene solución.

Observación del profesor: Quiero que noten lo siguiente en el sistema que se acaba de resolver, la división de los coeficientes de x, coincide con la división de coeficientes de "y" pero no coincide con la división de los términos independientes:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Se cumple que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

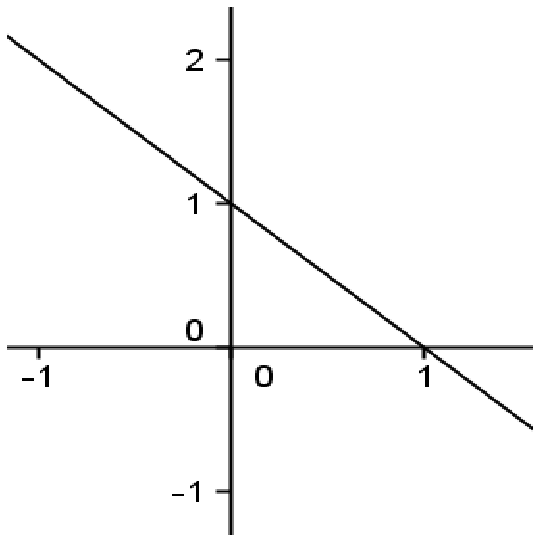
Siempre que ocurra lo anterior en un sistema lineal de 2X2, se tendrán rectas paralelas y se obtendrá una ecuación degenerada de constante no nula al resolver el sistema y por lo tanto no tendrá solución.

h) $\begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ 3x + 3y = 3 & (2) \end{cases}$

Solución: Por el método de suma y resta, dada por un alumno.
Multiplicando por -3 la ecuación (1) y sumándola a la (2)
-3x-3y=-3
3x+3y=3

0x+0y=0
Se tiene una ecuación degenerada de constante nula, por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones que corresponden a los puntos que están sobre la recta.

Al graficar notamos que en realidad no se tienen dos rectas, sino solo una, ya que la ecuación (2) es un múltiplo de la (1).



Conclusión grupal: Si al resolver un sistema de 2x2 lineal se obtiene una ecuación degenerada de constante nula, implica que gráficamente tenemos una línea.

Observación del profesor: Quiero que noten lo siguiente en el sistema que se acaba de resolver, la división de los coeficientes de x, coincide con la división de coeficientes de "y" así como también coincide con la división de los términos independientes:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Se cumple que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

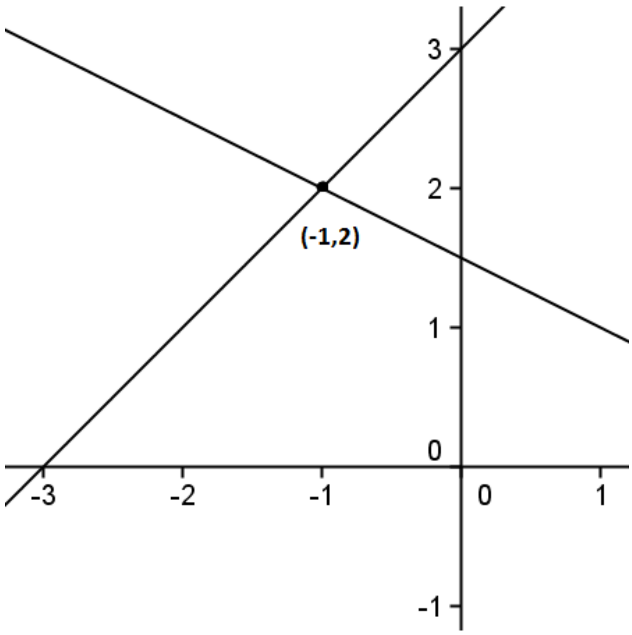
Siempre que ocurra lo anterior en un sistema lineal de 2X2, se tendrá una sola recta, debido a que las ecuaciones son múltiplos y se obtendrá una ecuación degenerada de constante nula al resolver el sistema y por lo tanto tendrá infinitas soluciones que serán todos los puntos (x,y) que pertenezcan a la recta.

i) $$\begin{cases} x + 2y = 3 & (1) \\ x - y = -3 & (2) \end{cases}$$

Solución: Dada por un alumno
Por suma y resta, multiplico la 2da ecuación por 2 para eliminar la "y"

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 2y = -6 \end{cases}$$

Sumando 3x + 0y = -3
Despejando x=-1
Sustituyendo en (2), se tiene que y=2



Conclusión grupal: Si al resolver un sistema lineal de 2x2 no se obtiene ninguna ecuación degenerada, el sistema tendrá solución única y corresponderá al punto de intersección de las rectas correspondientes a las ecuaciones.

2.3.- 3ra sesión (1 hora): *Se espera que los alumnos usen los métodos de suma y resta y sustitución para identificar cuando un sistema de ecuaciones de 3x3 tiene una solución única, una infinidad y no tiene solución.*

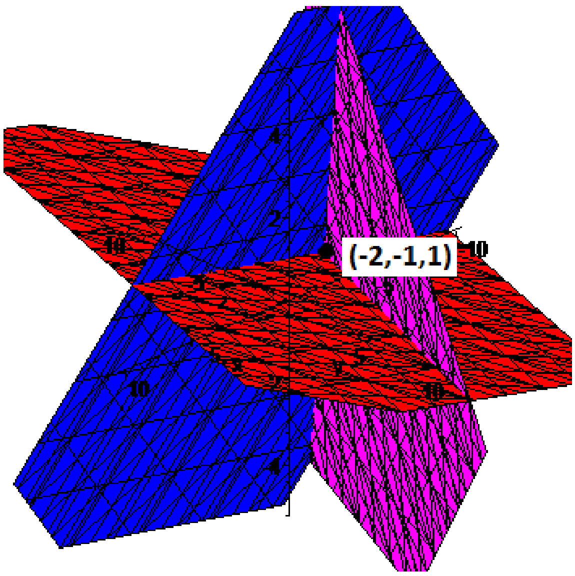
j) $$\begin{cases} x+2y-4z=-4 & (1) \\ 5x+11y-21z=-22 & (2) \\ 3x-2y+3z=11 & (3) \end{cases}$$

Solución: Dada por un alumno
Por sustitución, despejo x de la ecuación (1) y sustituyo el despeje en la ecuación (2) y (3)
x=-2y+4z-4 (4)
Después de simplificar se tiene

$$\begin{cases} y-z=-2 & (5) \\ -8y+15z=23 & (6) \end{cases}$$

Despejando "y" de la (5) y sustituyendo en (6)
y=z-2 (7)
Se tiene 7z=16+23
Z=1
Sustituyendo en (7) para hallar "y"
y=1-2
y=-1
sustituyendo en (4) para hallar x X=-2(-1)+4(1)-4 **x=-2**

Conclusión grupal: Como no se obtuvo ninguna ecuación degenerada, el sistema tendrá solución única y corresponderá al punto de intersección de tres planos.



k) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & (1) \\ 2x + 5y - 8z = 4 & (2) \\ 3x + 8y - 13z = 7 & (3) \end{cases}$

Solución: Dada por un alumno
Por suma y resta, eliminando la x, multiplico por -2 la ecuación (1) y se la sumo a la (2)
-2x-4y+6z=-2
2x+5y-8z=4
----
y-2z=2 (4)
Multiplico por -3 la ecuación (1) y se la sumo a la (3)
-3x-6y+9z=-3
3x+8y-13z=7

2y- 4z=4 (5)

Resolviendo la ecuación (4) y (5)

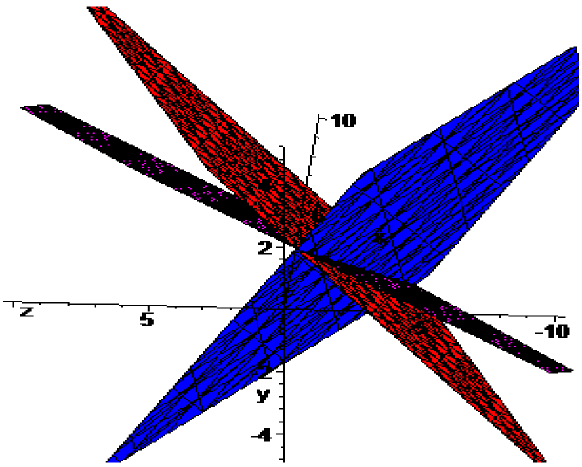
$$\begin{cases} y - 2z = 2 & (4) \\ 2y - 4z = 4 & (5) \end{cases}$$

Multiplico por -2 la ecuación (4)
-2y+4z=-4
2y-4z=4

0y+0z=0

Conclusión grupal: Si al resolver un sistema de 3x3 lineal se obtiene una ecuación degenerada de constante nula, implica que el sistema tiene infinitas soluciones.

Observación del profesor: Cuando se tiene un sistema lineal de 3X3 la interpretación es un poco más complicada, cuando se obtiene una ecuación degenerada de constante nula por lo general quiere decir en este caso que alguna de las ecuaciones se obtiene al sumar múltiplos de las otras dos, se dice entonces que una ecuación es una combinación lineal de las otras dos. Lo que ocurrirá gráficamente es que los tres planos se van a intersectar en una infinidad de puntos.



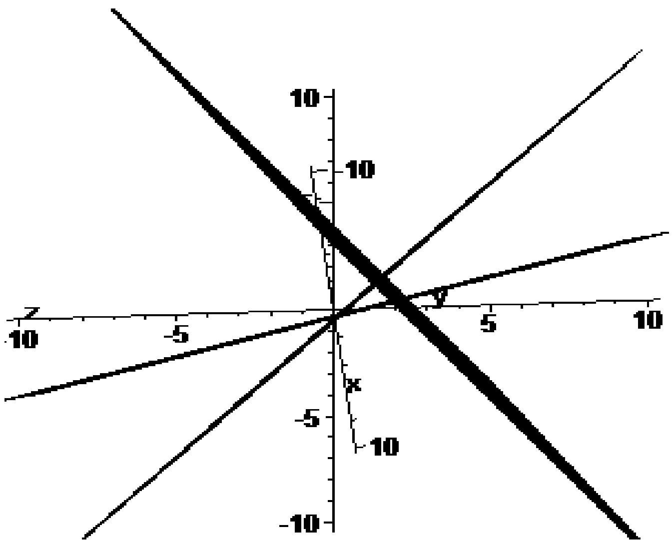
l) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & (1) \\ 3x - y + 2z = 7 & (2) \\ 5x + 3y - 4z = 2 & (3) \end{cases}$

Solución: Dada por un alumno
Por sustitución, despejo x de la ecuación (1) y sustituyo el despeje en la ecuación (2) y (3)
x=-2y+3z+1 (4)
Después de simplificar se tiene

$$\begin{cases} -7y + 11z = 4 & (5) \\ -7y + 11z = -3 & (6) \end{cases}$$

Conclusión grupal: Podemos ver que la división de los coeficientes de "y" es igual a la división de los coeficientes de z y distinto a la división de los términos independientes, por lo dicho anteriormente este sistema no tiene solución porque se obtendrá una ecuación degenerada de constante no nula.

Observación del profesor: Vamos a graficar las tres ecuaciones con Maple para que observemos que ocurre.



Observen como nunca se intersectan al mismo tiempo los tres planos.

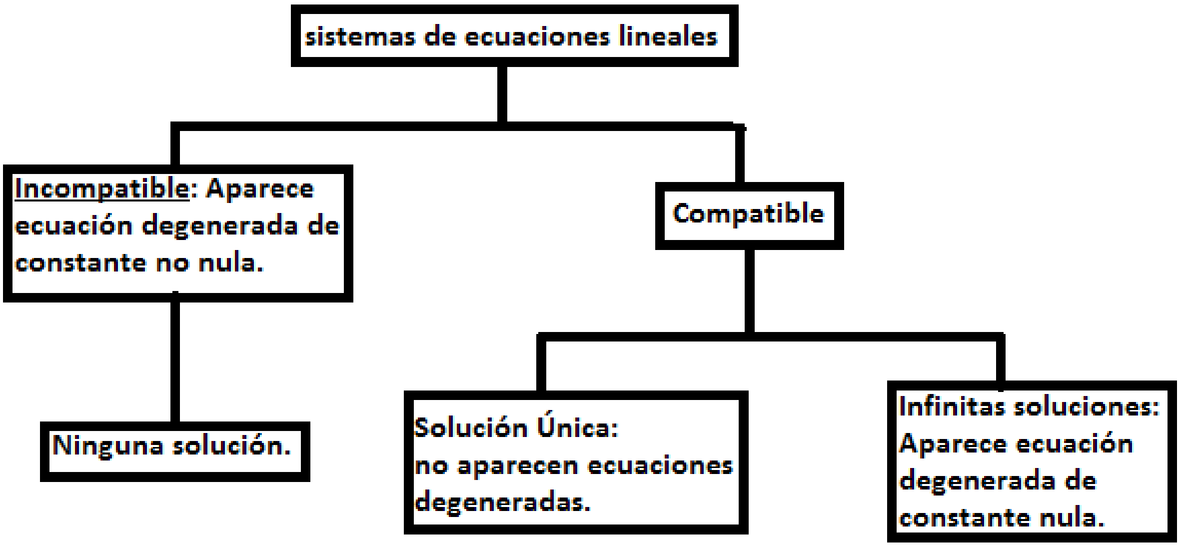
2.4.- Conclusiones generales de los alumnos:

a) Si al resolver un sistema de ecuaciones lineales se obtiene una ecuación no degenerada, el sistema tendrá solución única.

b) Si al resolver un sistema de ecuaciones lineales se obtiene una ecuación degenerada de constante nula, el sistema tendrá infinitas soluciones.

c) Si al resolver un sistema de ecuaciones lineales se obtiene una ecuación degenerada de constante no nula, el sistema no tendrá solución.

2.5.- Comentario del profesor:
La siguiente clase analizaremos un método similar al de suma y resta llamado *eliminación gaussiana*, que nos permitirá escribir los sistemas de ecuaciones en forma escalonada, esta forma tiene la ventaja de que podemos resolver el sistema de una forma muy simple (por sustitución inversa) y además podremos sacar conclusiones acerca de la naturaleza de sus soluciones.



2.6.- Problemas y ejercicios propuestos para consolidar el tema

1.-Determina si los siguientes sistemas tienen solución única, infinitas soluciones o no tienen solución.

a) $\begin{cases} x+3y=9 \\ 2x+6y=18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-5y=4 \\ -6x+10y=-3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+5y-z=-4 \\ 3x-2y-z=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ 3x+2y-z=3 \\ x+3y-4z=-1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+8y-5z=3 \\ 3x-2y+3z=1 \\ 2x+3y-z=4 \end{cases}$

1) En una gasolinera de la Ciudad de México trabaja Juan despachando gasolina, la magna tiene un precio de \$5.44 el litro, la premium \$6.11, (Junio 2001) podrías darle a Juan una ecuación lineal que le indique cuánto de dinero debe de entregar al finalizar el día.

2) Una persona compra una mezcla de café de 3.25 kg por un precio de 225 pesos. Si el kg de café Córdoba cuesta 80 pesos y el Xalapa 60 pesos, ¿cuánto lleva de cada tipo de café la mezcla?

3) Un señor hace ejercicio diariamente cierto día corre 30 min. y nada 30 min. Recorriendo una distancia total de 8 km, al día siguiente corre 45 min. y nada 15 min. para un total de 10 km, suponiendo que su velocidad en cada deporte es la misma en ambos días, ¿con que velocidad corre y con qué velocidad nada?

4) Un centro de diversión tiene capacidad de 101 mesas, las mesas cuentan con 4, 6 y 8 asientos, la capacidad total de asientos es de 552. En cierto día se ocupo la mitad de las mesas con 4 asientos, un octavo de las mesas con 6 asientos y un tercio de las de 8 asientos para un total de 35 mesas. ¿Cuántas de cada tipo se usaron ese día?

5) Una empresa juguetera produce tres tipos de carritos, el modelo 1 con un precio de 100 pesos, el modelo 2 con un precio de 200 pesos y el modelo 3 con un precio de 300 pesos. Cierto día vendieron un total de 47 carritos por un total de 11100 pesos, con estos datos ¿es posible saber cuántos carritos de cada tipo se vendieron?

6) Un proveedor de productos para el campo tiene tres tipos de fertilizantes G1, G2 y G3 que tienen contenidos de nitrógeno de 30%, 20% y 15%, respectivamente. Se ha planteado mezclarlas para obtener 600 kilogramos de fertilizante con un contenido de nitrógeno de 25%. Esta mezcla, debe contener 100 kilogramos más del tipo G3 que del tipo G2. ¿Cuántos kilogramos se deben usar de cada tipo?

3.- Conclusiones acerca de la implementación del tema

Si bien considero muy importante que los alumnos tengan bases teóricas para determinar cuándo un sistema de ecuaciones tiene o no solución, debo mencionar que considero aún más importante que los alumnos tengan la capacidad de resolver problemas, es decir, dada una situación concreta, que sean capaces de construir el sistema de ecuaciones que lo representa y resolverlo por algún método que manejen.

Cabe decir que en las aplicaciones prácticas muy difícilmente aparecen los sistemas sin solución o con infinitas soluciones.

Recomiendo que después de sentar las bases teóricas a través de ejercicios, se dedique un tiempo en especial a fomentar que los alumnos resuelvan problemas, en la bibliografía recomiendo dos libros con problemas muy interesantes sobre este tema.

4.- Bibliografía empleada en este trabajo

1.- Barnett Raymond, et al. Álgebra, Mc Graw-Hill Interamericana, México, 2000.

2.- Kelly, Timothy J., Álgebra y Trigonometría, Precálculo, Editorial Trillas, México, 2000, (Muy recomendado).

3.- Leithold, Louis. Matemáticas previas al cálculo: Análisis Funcional y Geometría Analítica, Harla, México, 1996.

4.- Lipschutz, Seymour. Álgebra Lineal, Mc Graw-Hill, México, 1992.

5.- Rees, Paul K., Álgebra. Editorial Reverte, 1970.

6.- Reyes Esparza, Alejandro, et al. Guía para el profesor de Matemática III, Colegio de Ciencias y Humanidades, México, 2009.

7.- Swokowski, Earl W., Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2002, (Muy recomendado).