Instrucciones: Resuelve los ejercicios indicados.

La guía se puede hacer en parejas y se entrega el día del examen, contará 3 participaciones.

El examen será el jueves 30 de Abril

Elabora la gráfica, Página 307: 13, 14, 15, 16

Dala ecuación, Página 308: 45, 46, 47, 48

Demuestra las identidades, Página 322: 27, 28,29,30,31,34,35,36, 45, 49,50,55 de multiplicar por a las ordenadas para obtener puntos sobre la gráfica de $y = a\tan(bx + c)$. Tampoco se hará referencia a los defasamientos de la función tangente. El mismo tipo de consideraciones puede hacerse para las funciones cotangente, secante y cosecante.

Muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza varían cíclica o rítmicamente. Algunas veces es posible representar ese tipo de comportamiento mediante funciones trigonométricas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 El proceso rítmico de la respiración consiste en periodos alternantes de inhalación y exhalación. Cada 5 minutos se lleva a cabo un ciclo completo. Si F representa el flujo de aire en el tiempo t (en litros por segundo) y si la máxima intensidad de flujo es de 0.6 litros/segundo (l/s), obtener una fórmula $F = a\,\text{sen}\, bt$ que represente esta información.

SOLUCIÓN La intensidad de flujo de aire F es una función de t, es decir, $F = f(t)$ para alguna f. Si $f(t) = a\,\text{sen}\,(bt)$ para alguna $b > 0$, entonces el periodo de f es $-2\pi/b$. En esta aplicación el periodo es de 5 segundos y, por lo tanto,

$$\frac{2\pi}{b} = 5 \quad \text{o bien} \quad b = \frac{2\pi}{5}.$$

Puesto que el flujo máximo corresponde a la amplitud a de f, puede hacerse $a = 0.6$. De aquí se obtiene la fórmula

$$F = 0.6\ \text{sen}\,(\tfrac{2}{5}\pi t).$$ ■

Ejercicios 6.7

1. Sin señalar muchos puntos, grafique y determine la amplitud y el periodo de cada función f definida a continuación
   (a) $f(x) = 4\,\text{sen}\,x$ (b) $f(x) = \text{sen}\,4x$
   (c) $f(x) = \frac{1}{4}\,\text{sen}\,x$ (d) $f(x) = \text{sen}\,\frac{1}{4}x$
   (e) $f(x) = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{4}x$ (f) $f(x) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,4x$
   (g) $f(x) = -4\,\text{sen}\,x$ (h) $f(x) = \text{sen}(-4x)$
2. Grafique las funciones para el coseno análogas a las que se definen en el Ejercicio 1.
3. Grafique cada función f definida a continuación y determine la amplitud y periodo en cada caso.
   (a) $f(x) = 3\cos x$ (b) $f(x) = \cos 3x$
   (c) $f(x) = \frac{1}{3}\cos x$ (d) $f(x) = \cos\frac{1}{3}x$
   (e) $f(x) = 2\cos\frac{1}{3}x$ (f) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 2x$
   (g) $f(x) = -3\cos x$ (h) $f(x) = \cos(-3x)$
4. Grafique las funciones para el seno, análogas a las que se definen en el Ejercicio 3.

Grafique las ecuaciones de los Ejercicios 5 a 44. Siempre que sea apropiado indique la amplitud, el periodo y el defasamiento.

5. $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
6. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
7. $y = 3\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
8. $y = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
9. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
10. $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
11. $y = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
12. $y = 5\,\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
13. $y = \text{sen}(3x + \pi)$
14. $y = \cos(2x + \pi)$
15. $y = -2\,\text{sen}(3x + \pi)$
16. $y = 3\cos(3x - \pi)$
17. $y = 5\,\text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$
18. $y = -4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

19. $y = 6 \operatorname{sen} \pi x$ **20.** $y = 3 \cos \frac{1}{2}\pi x$

21. $y = 2 \cos \frac{\pi}{2} x$ **22.** $y = 4 \operatorname{sen} 3\pi x$

23. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi x$ **24.** $y = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} x$

25. $y = \frac{1}{2} \sec x$ **26.** $y = \frac{1}{4} \csc x$

27. $y = -2 \csc x$ **28.** $y = -3 \sec x$

29. $y = \sec 2x$ **30.** $y = \csc 3x$

31. $y = \csc\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **32.** $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

33. $y = \tan \frac{1}{2} x$ **34.** $y = \cot 2x$

35. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **36.** $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

37. $y = \frac{1}{2} \cot x$ **38.** $y = -2 \tan x$

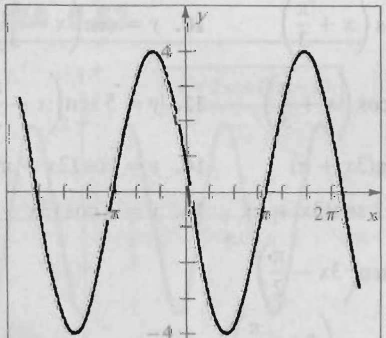
39. $y = \tan(-x)$ **40.** $y = -\cot x$

41. $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **42.** $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

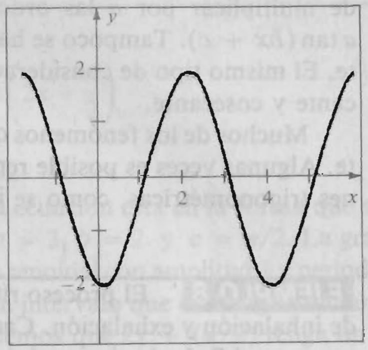
43. $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **44.** $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Para las gráficas generadas con una computadora, que se muestran en los Ejercicios 45 a 48, encuentre (a) la amplitud y el periodo; (b) una ecuación para la gráfica en la forma $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$; y (c) el defasamiento.

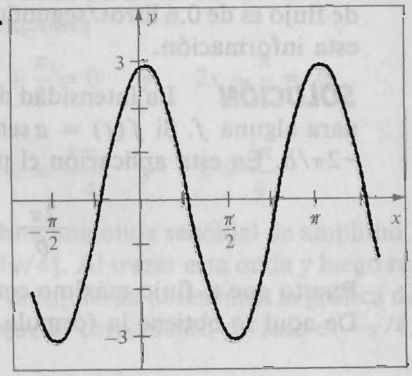
45.



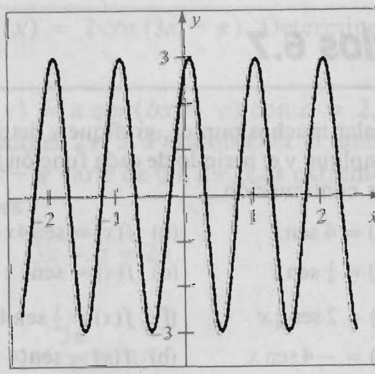
46.



47.

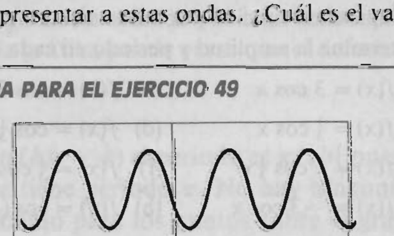


48.



49. En la figura se muestra un encefalograma de las ondas producidas durante el sueño en el cerebro humano. Si se usa $W = a \operatorname{sen}(bt + c)$ para representar a estas ondas. ¿Cuál es el valor de b?

FIGURA PARA EL EJERCICIO 49



que es la misma expresión que se obtuvo a partir de $(\tan\theta - \sec\theta)^2$. La ecuación dada es una identidad, puesto que todos los pasos son reversibles. ■

En el cálculo es conveniente, algunas veces, cambiar la forma de ciertas expresiones algebraicas haciendo **sustitución trigonométrica**, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 Expresar $\sqrt{a^2 - x^2}$ como una función trigonométrica de θ, en la que no aparezcan radicales, haciendo la sustitución $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$, con $a > 0$ y $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

SOLUCIÓN Haciendo $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$,

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}\\ &= \sqrt{a^2 - a^2\mathrm{sen}^2\,\theta}\\ &= \sqrt{a^2(1 - \mathrm{sen}^2\,\theta)}\\ &= \sqrt{a^2\cos^2\theta}\\ &= a\cos\theta.\end{aligned}$$

La última igualdad es válida porque (i) $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$ y (ii) si $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, entonces $\cos\theta \ge 0$ y por lo tanto $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$. ■

Ejercicios 7.1

Verifique las identidades de los Ejercicios 1 a 88.

1. $\cos\theta\sec\theta = 1$
2. $\tan\alpha\cot\alpha = 1$
3. $\mathrm{sen}\,\theta\sec\theta = \tan\theta$
4. $\mathrm{sen}\,\alpha\cot\alpha = \cos\alpha$
5. $\dfrac{\csc x}{\sec x} = \cot x$
6. $\cot\beta\sec\beta = \csc\beta$
7. $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) = \mathrm{sen}^2\,\alpha$
8. $\cos^2 x(\sec^2 x - 1) = \mathrm{sen}^2\,x$
9. $\cos^2 t - \mathrm{sen}^2\,t = 2\cos^2 t - 1$
10. $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$
11. $\dfrac{\mathrm{sen}\,t}{\csc t} + \dfrac{\cos t}{\sec t} = 1$
12. $1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,x = 2\cos^2 x - 1$
13. $(1 + \mathrm{sen}\,\alpha)(1 - \mathrm{sen}\,\alpha) = \dfrac{1}{\sec^2\alpha}$
14. $(1 - \mathrm{sen}^2\,t)(1 + \tan^2 t) = 1$
15. $\sec\beta - \cos\beta = \tan\beta\,\mathrm{sen}\,\beta$
16. $\dfrac{\mathrm{sen}\,w + \cos w}{\cos w} = 1 + \tan w$
17. $\dfrac{\csc^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \cot^2\theta$
18. $\mathrm{sen}\,x + \cos x\cot x = \csc x$
19. $\mathrm{sen}\,t(\csc t - \mathrm{sen}\,t) = \cos^2 t$
20. $\cot t + \tan t = \csc t\sec t$
21. $\csc\theta - \mathrm{sen}\,\theta = \cot\theta\cos\theta$
22. $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \csc\theta$
23. $\dfrac{\sec^2 u - 1}{\sec^2 u} = \mathrm{sen}^2\,u$
24. $(\tan u + \cot u)(\cos u + \mathrm{sen}\,u) = \sec u + \csc u$
25. $(\cos^2 x - 1)(\tan^2 x + 1) = 1 - \sec^2 x$
26. $(\cot\alpha + \csc\alpha)(\tan\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha) = \sec\alpha - \cos\alpha$

27. $\sec t \csc t + \cot t = \tan t + 2 \cos t \csc t$

28. $\dfrac{1 + \cos^2 y}{\operatorname{sen}^2 y} = 2 \csc^2 y - 1$

29. $\sec^2 \theta \csc^2 \theta = \sec^2 \theta + \csc^2 \theta$

30. $\dfrac{\sec x - \cos x}{\tan x} = \dfrac{\tan x}{\sec x}$

31. $\dfrac{1 + \cos t}{\operatorname{sen} t} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} = 2 \csc t$

32. $\tan^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \tan^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha$

33. $\dfrac{1 + \tan^2 v}{\tan^2 v} = \csc^2 v$

34. $\dfrac{\sec \theta + \csc \theta}{\sec \theta - \csc \theta} = \dfrac{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta}$

35. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = 4 \tan x \sec x$

36. $\dfrac{1}{1 - \cos \gamma} + \dfrac{1}{1 + \cos \gamma} = 2 \csc^2 \gamma$

37. $\dfrac{1 + \csc \beta}{\sec \beta} - \cot \beta = \cos \beta$

38. $\dfrac{\cos x \cot x}{\cot x - \cos x} = \dfrac{\cot x + \cos x}{\cos x \cot x}$

39. $(\sec u - \tan u)(\csc u + 1) = \cot u$

40. $\dfrac{\cot \theta - \tan \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta} = \csc \theta - \sec \theta$

41. $\dfrac{\cot \alpha - 1}{1 - \tan \alpha} = \cot \alpha$

42. $\dfrac{1 + \sec \beta}{\tan \beta + \operatorname{sen} \beta} = \csc \beta$

43. $\csc^4 t - \cot^4 t = \cot^2 t + \csc^2 t$

44. $\cos^4 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = \operatorname{sen}^4 \theta + \cos^2 \theta$

45. $\dfrac{\cos \beta}{1 - \operatorname{sen} \beta} = \sec \beta + \tan \beta$

46. $\dfrac{1}{\csc y - \cot y} = \csc y + \cot y$

47. $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x}$

48. $\dfrac{\cot x}{\csc x + 1} = \dfrac{\csc x - 1}{\cot x}$

49. $\dfrac{\cot u - 1}{\cot u + 1} = \dfrac{1 - \tan u}{1 + \tan u}$

50. $\dfrac{1 + \sec x}{\operatorname{sen} x + \tan x} = \csc x$

51. $\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r = \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r$

52. $\operatorname{sen}^4 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta = 1$

53. $\tan^4 k - \sec^4 k = 1 - 2 \sec^2 k$

54. $\sec^4 u - \sec^2 u = \tan^4 u + \tan^2 u$

55. $(\sec t + \tan t)^2 = \dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{sen} t}$

56. $\sec^2 \gamma + \tan^2 \gamma = (1 - \operatorname{sen}^4 \gamma) \sec^4 \gamma$

57. $(\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta)^3 = 1$

58. $\dfrac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t} = \csc t + \cot t$

59. $\dfrac{1 + \csc \beta}{\cot \beta + \cos \beta} = \sec \beta$

60. $\dfrac{\operatorname{sen} z \tan z}{\tan z - \operatorname{sen} z} = \dfrac{\tan z + \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z \tan z}$

61. $\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\tan^4 x}\right)^3 \left(\dfrac{\csc^3 x}{\cot^6 x}\right)^2 = 1$

62. $\dfrac{\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x \cos x$

63. $\dfrac{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}{\tan^2 \theta - 1} = \dfrac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta}$

64. $(\csc t - \cot t)^4 (\csc t + \cot t)^4 = 1$

65. $(a \cos t - b \operatorname{sen} t)^2 + (a \operatorname{sen} t + b \cos t)^2 = a^2 + b^2$

66. $\sin^6 v + \cos^6 v = 1 - 3 \operatorname{sen}^2 v \cos^2 v$

67. $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} = \dfrac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

68. $\dfrac{\tan u - \tan v}{1 + \tan u \tan v} = \dfrac{\cot v - \cot u}{1 + \cot u \cot v}$

69. $\sqrt{\dfrac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \dfrac{1 - \cos t}{|\operatorname{sen} t|}$

70. $\sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen} \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta}} = \dfrac{|\cos \theta|}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

71. $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \dfrac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 2 \csc \alpha$

72. $\dfrac{\csc x}{1+\csc x} - \dfrac{\csc x}{1-\csc x} = 2\sec^2 x$

73. $\dfrac{1}{\tan\beta + \cot\beta} = \operatorname{sen}\beta\cos\beta$

74. $\dfrac{\cot y - \tan y}{\operatorname{sen} y\cos y} = \csc^2 y - \sec^2 y$

75. $\sec\theta + \csc\theta - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta\tan\theta + \cos\theta\cot\theta$

76. $\operatorname{sen}^3 t + \cos^3 t = (1 - \operatorname{sen} t\cos t)(\operatorname{sen} t + \cos t)$

77. $(1 - \tan^2\phi)^2 = \sec^4\phi - 4\tan^2\phi$

78. $\cos^4 w + 1 - \operatorname{sen}^4 w = 2\cos^2 w$

79. $\dfrac{\tan x}{1-\cot x} + \dfrac{\cot x}{1-\tan x} = 1 + \sec x\csc x$

80. $\dfrac{\cos\gamma}{1-\tan\gamma} + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{1-\cot\gamma} = \cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma$

81. $\operatorname{sen}(-t)\sec(-t) = -\tan t$

82. $\dfrac{\cot(-v)}{\csc(-v)} = \cos v$

83. $\log 10^{\tan t} = \tan t$

84. $10^{\log|\operatorname{sen} t|} = |\operatorname{sen} t|$

85. $\ln\cot x = -\ln\tan x$

86. $\ln\sec\theta = -\ln\cos\theta$

87. $-\ln|\sec\theta - \tan\theta| = \ln|\sec\theta + \tan\theta|$

88. $\ln|\csc x - \cot x| = -\ln|\csc x + \cot x|$

En los Ejercicios 89 a 100 muestre que las ecuaciones dadas no son identidades. (*Sugerencia:* Obtenga un número del dominio de t o θ para el cual la ecuación no se cumple.)

89. $\cos t = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$

90. $\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = \operatorname{sen} t + \cos t$

91. $\sqrt{\operatorname{sen}^2 t} = \operatorname{sen} t$

92. $\sec t = \sqrt{\tan^2 t + 1}$

93. $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$

94. $\log(1/\operatorname{sen} t) = 1/(\log\operatorname{sen} t)$

95. $\cos(-t) = -\cos t$

96. $\operatorname{sen}(t+\pi) = \operatorname{sen} t$

97. $\cos(\sec t) = 1$

98. $\cot(\tan\theta) = 1$

99. $\operatorname{sen}^2 t - 4\operatorname{sen} t - 5 = 0$

100. $3\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$

En los Ejercicios 101 a 104 haga la sustitución trigonométrica $x = a\operatorname{sen}\theta$ para $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, y emplee las identidades fundamentales para simplificar la expresión resultante. (Compare con el Ejemplo 6.)

101. $(a^2 - x^2)^{3/2}$

102. $\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$

103. $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

104. $\dfrac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$

En los Ejercicios 105 a 108 haga la sustitución trigonométrica $x = a\operatorname{sen}\theta$ para $-\pi/2 \leq \theta < \pi/2$ y simplifique la expresión resultante.

105. $\sqrt{a^2 + x^2}$

106. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

107. $\dfrac{1}{x^2 + a^2}$

108. $\dfrac{(x^2 + a^2)^{3/2}}{x}$

En los Ejercicios 109 a 112 haga la sustitución trigonométrica $x = a\operatorname{sen}\theta$ para $0 < \theta < \pi/2$ y simplifique la expresión resultante.

109. $\sqrt{x^2 - a^2}$

110. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}}$

111. $x^3\sqrt{x^2 - a^2}$

112. $\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}$

7.2 Ecuaciones trigonométricas

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación que contiene expresiones trigonométricas. Las soluciones de ecuaciones trigonométricas se pueden expresar en función de nú-